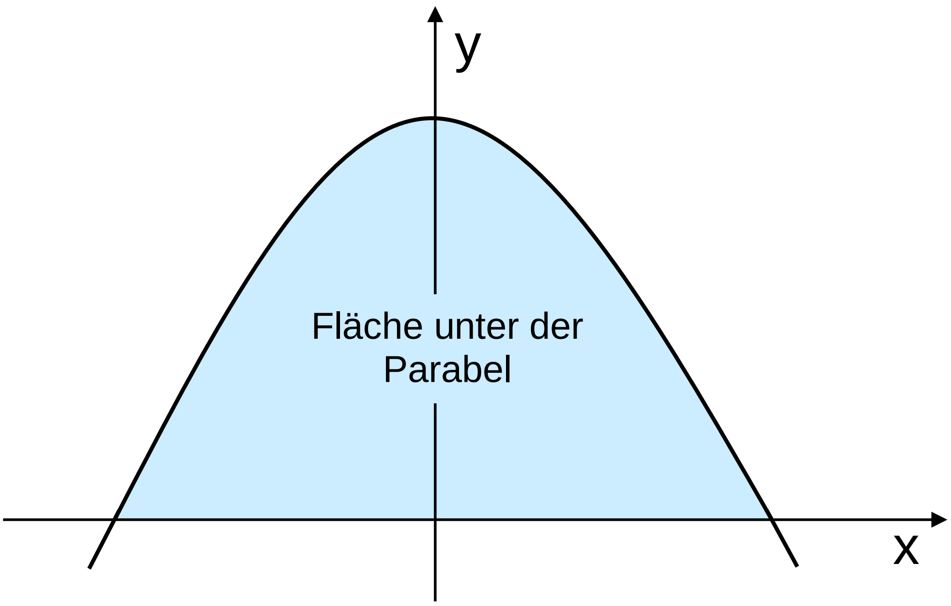
Die Integralrechnung ist eine Art Flächenberechnung. Dabei handelt es sich um den Flächeninhalt unter krummlienigen Kurven von Funktionen. Solche Flächen können nicht einfach mit Länge mal Breite berechnet werden.

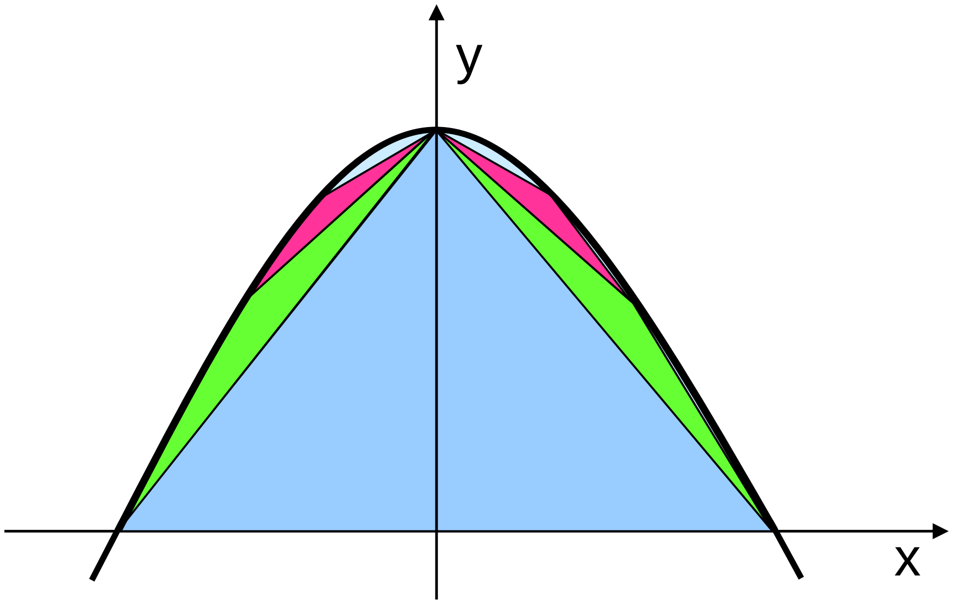
Das Problem solcher Flächenberechnung ist schon sehr alt und wurde bereits von **ARCHIMEDES** (287 - 212 v.u.Z.) untersucht. ARCHIMEDES hat z.B. berechnet, wie groß der Flächeninhalt unter einer Parabel ist. Das ist umso erstaunlicher, als es zu seiner Zeit überhaupt keine praktische Verwendung für diese Rechnungen gab.



Eine grundlegende Idee für diese Flächenberechnung ist folgende: Man versucht, eine „Kurvenfläche“ mit solchen Flächen auszufüllen, die man leicht berechnen kann. Das sind vor allem Rechteck- und Dreieickflächen. Dann summiert man diese Teilflächen und erhält die Gesamtfläche.

ARCHIMEDES hat die Parabelfläche ausgefüllt mit gleichschenkligen Dreiecken. Die noch freigebliebene Fläche wird immer kleiner und wird mit einem immer kleineren Dreieck ausgefüllt.

Theoretisch kann man mit allerkleinsten Dreiecken die Parabelfläche ganz ausfüllen. Allerdings nur, wenn man das unendlich fortsetzt, denn es zeigt sich, dass immer noch Platz freibleibt, so klein das Dreieck auch wird. Man bekommt mit dieser Methode doch schon recht genaue Ergebnisse.



Weil die Fläche sozusagen ausgeschöpft wird, nennt man diese Methode auch „Ausschöpfungs-Methode“ (mit Fremdwort: Exhaustions-Methode).

Man sieht, dass statt der Dreiecke auch Rechtecke oder Trapeze oder Kombinationen solcher Figuren genommen werden können. Die Flächen lassen sich leicht berechnen und müssen nur summiert werden. Das Ergebnis ist aber immer nur hinreichend genau.

Die Ausschöpfungs-Methode ist keine eigentliche Integralrechnung, denn die Integralrechnung beruht auf einer völlig anderen Methode.

Heute wird die Integralrechnung im wesentlichen so benutzt, wie sie von G.W.**LEIBNIZ** (1646 - 1716) und I.**NEWTON** (1643 - 1727) entwickelt wurde.

Man kann feststellen, dass die Integralrechnung rein rechnerisch die Umkehr-Rechnung der Differentialrechnung ist, weshalb beide auch zur Infinitesimal-Rechnung zusammengefasst werden.

Während bei der Differenzierung einer Funktion die 1.Ableitung ermittelt wird, kann man sich die Integration so vorstellen:
Eine Funktion zu integrieren (d.h. die Fläche unter der Funktionskurve zu berechnen) heißt, sich diese Funktion als 1.Ableitung zu denken. Nun sucht man eine dazu gehörige Funktion, die - wenn man sie ableitet - ebenjene 1.Ableitung (also die Ausgangsfunktion) ergeben würde. Diese andere Funktion heißt **Stammfunktion**.
Beispiel:

$$f(x) = 3x^5 + 7x + 2$$

Die Stammfunktion lautet:

$$f_S(x) = 3\frac{x^6}{6} + 7\frac{x^2}{2} + 2x$$

Würde man davon die 1.Ableitung bilden, dann erhält man genau die erste Funktion.
Das ist das Prinzip der Integration von Funktionen.

Diese Methode ist im Unterschied zur Ausschöpfungs-Methode in ihrem Vorgehen algebraisch und nicht geometrisch. Während die Ausschöpfung mit geometrischen Figuren arbeitet, verwendet die Integralrechnung algebraische Ausdrücke, also letztendlich Gleichungen.

Für die Integration gibt es eine spezielle Schreibweise

$$\int (3x^5+7x+2)\,dx = 3\frac{x^6}{6}+7\frac{x^2}{2}+2x$$

Allgemein:

$$\int f(x)\,dx$$

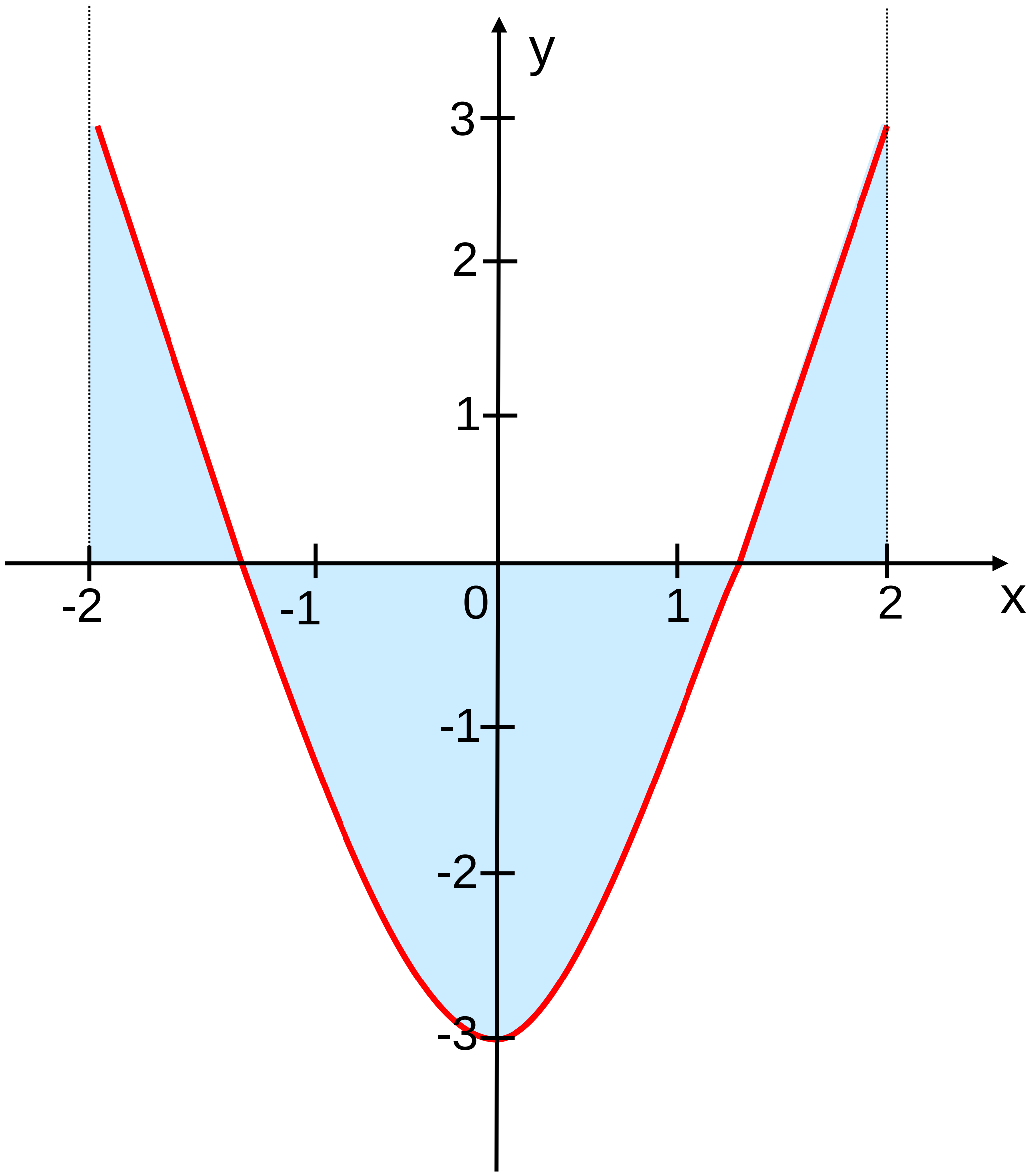
bedeutet: Integral der Funktion ***f*(x)**, also geometrisch die Fläche unter dieser Funktionskurve. Viele Stammfunktionen lassen sich leicht finden, aber noch mehr lassen sich nur schwer und manche gar nicht finden. So ist z.B.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x$$

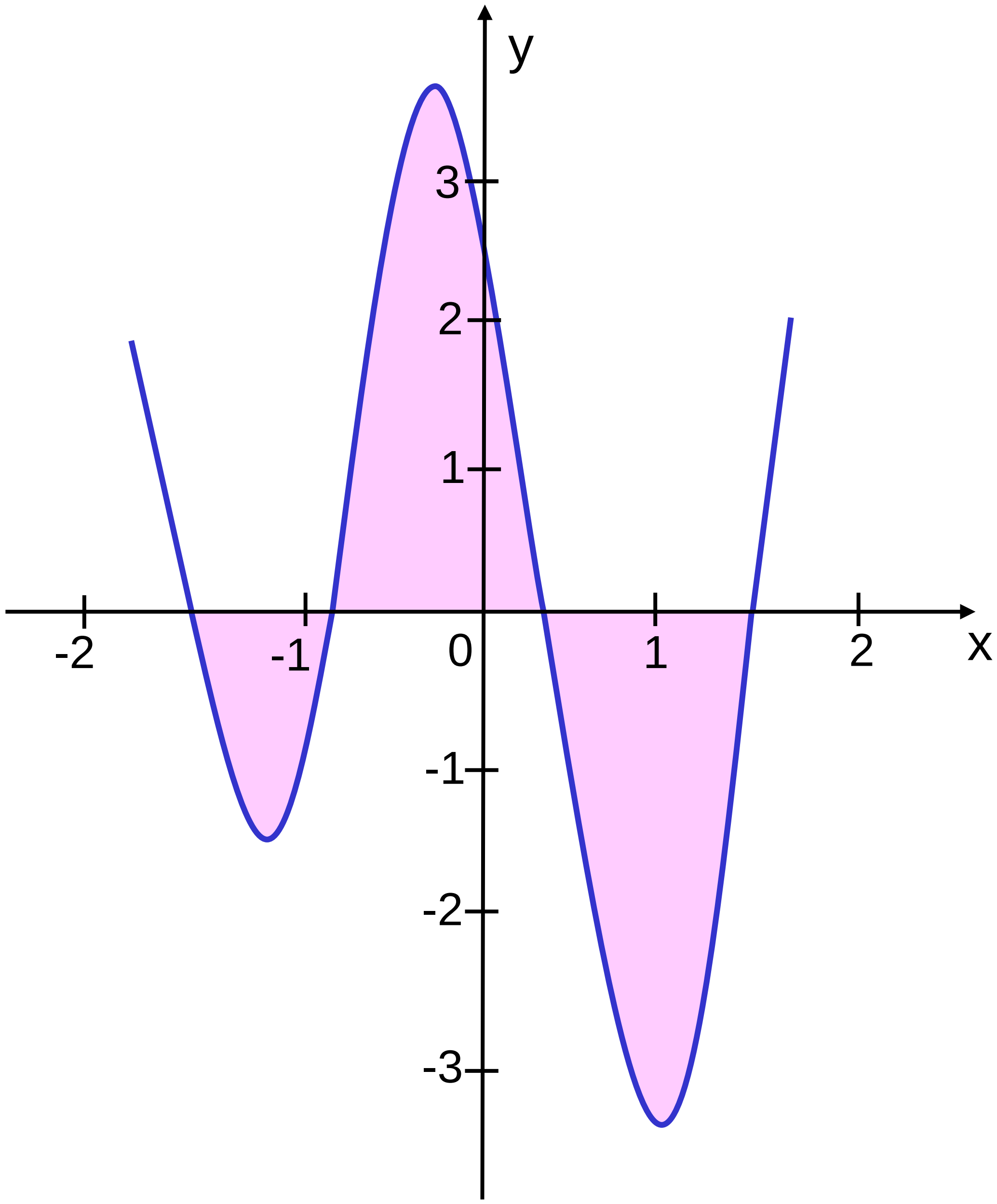
Zudem gibt es keinen eigentlichen Rechenweg (Algorithmus), um zur Stammfunktion zu kommen, sondern nur Regeln. Deshalb sind in Tabellen häufige und bekannte Stammfunktionen oder Grundintegrale aufgeführt. Außerdem gibt es im Internet Integral-Online Rechner.

Auf den folgenden Seiten sind einige Beispiele von Flächen unter Funktionskurven zu sehen, deren Flächeninhalt berechnet werden könnte.

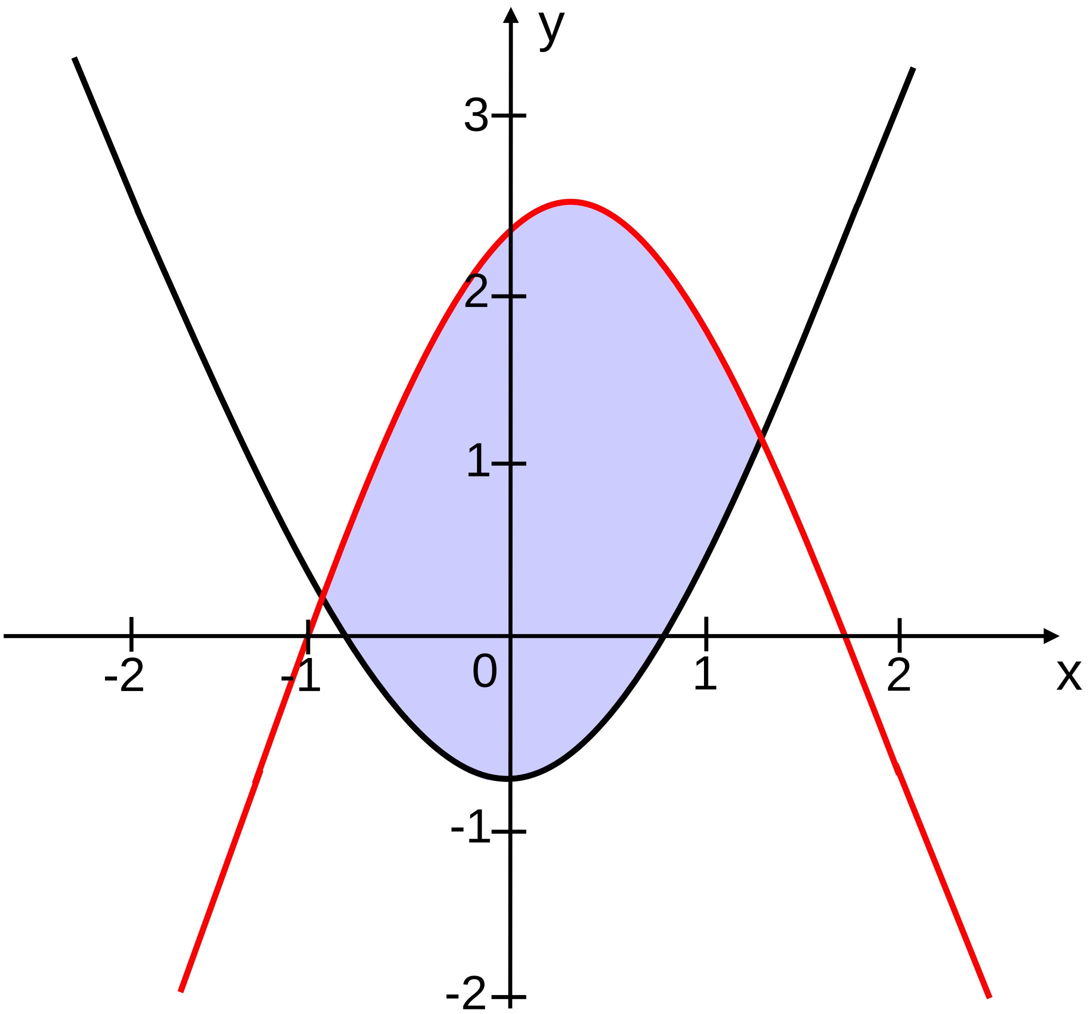
Der Flächeninhalt wird vom Graph der quadratischen Funktion und der x-Achse eingeschlossen.



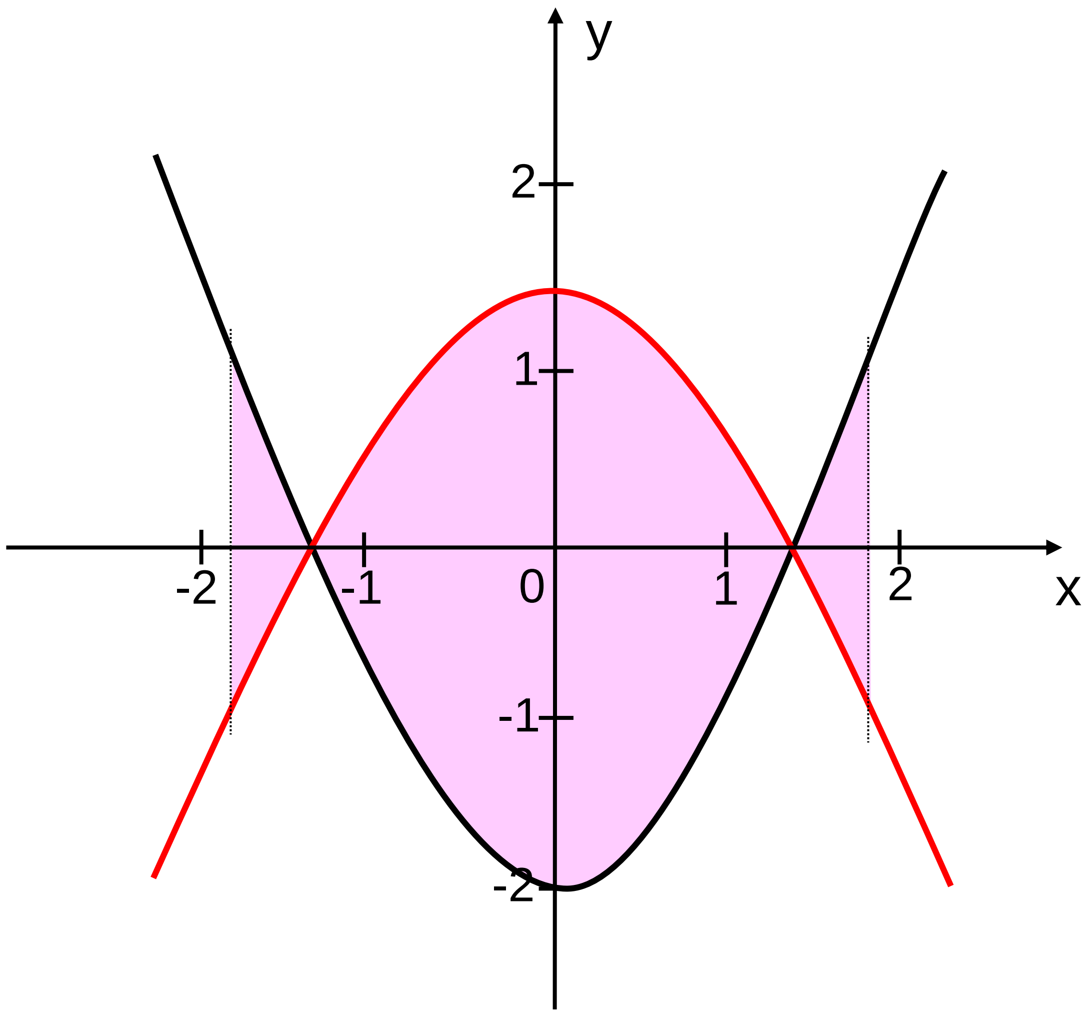
Der Flächeninhalt wird vom Graph der kubischen Funktion und der x-Achse eingeschlossen.



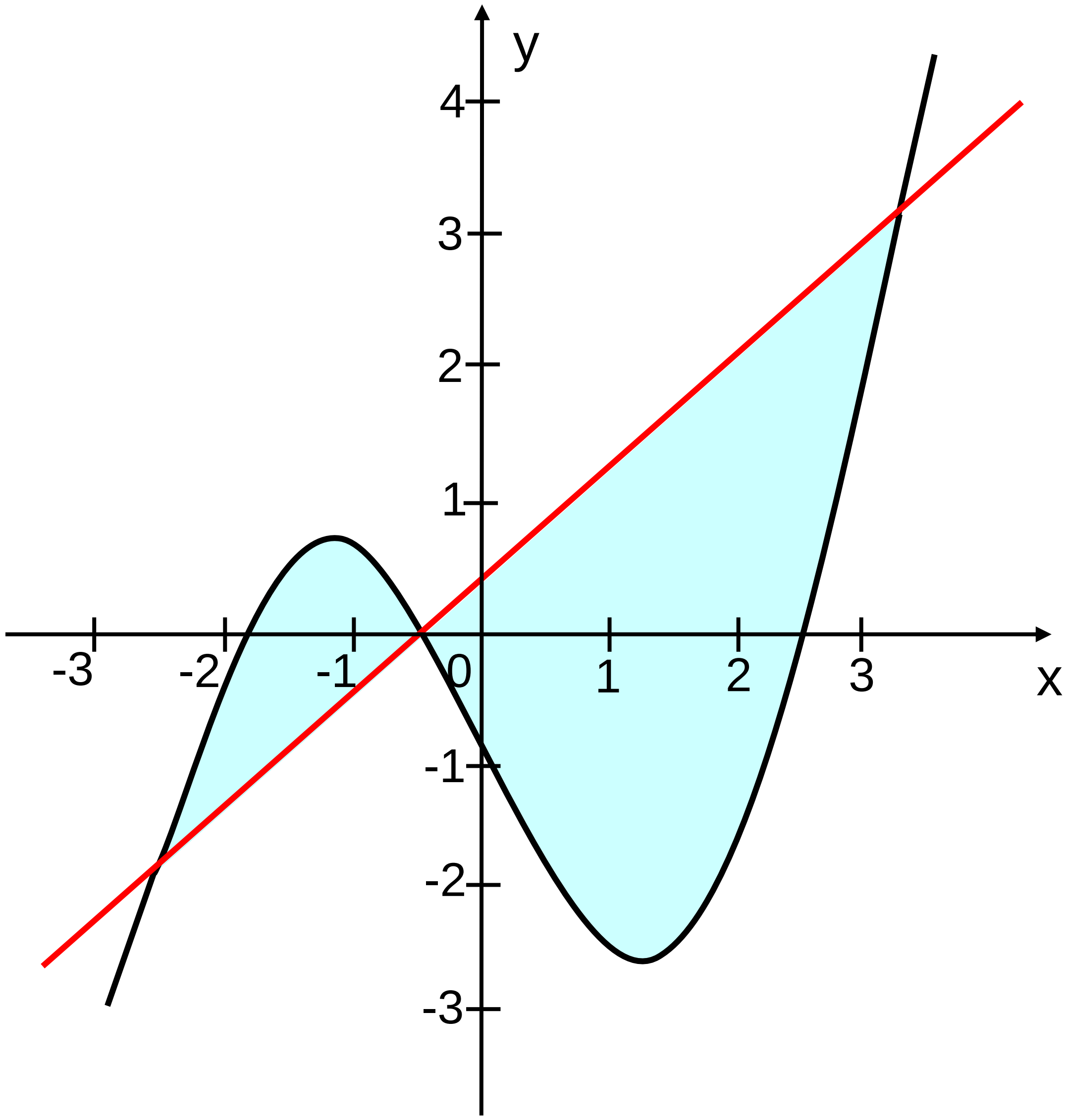
Der Flächeninhalt wird von den Graphen zweier quadratischer Funktionen eingeschlossen.



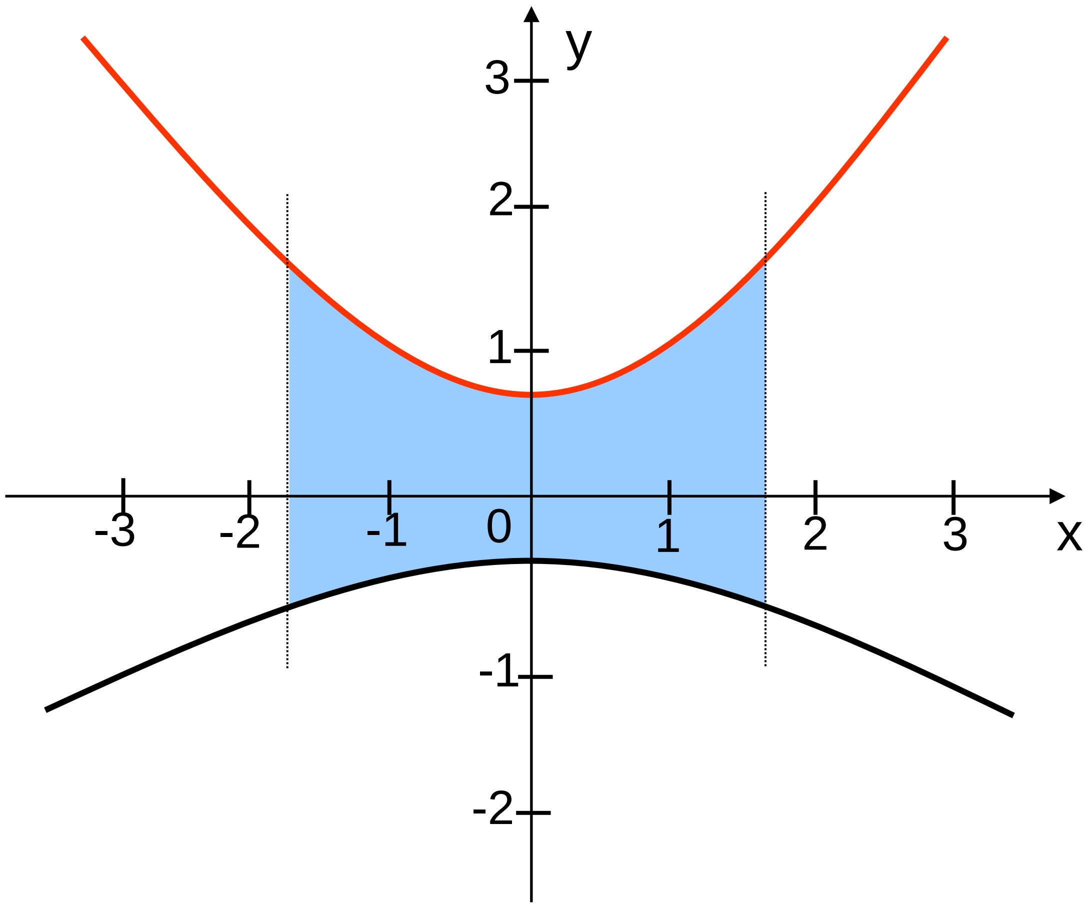
Flächeninhalt zwischen den Graphen zweier quadratischer Funktionen und über deren Schnittpunkte hinaus.



Der Flächeninhalt wird zwischen dem Graphen einer Funktion und einer Geraden eingeschlossen.

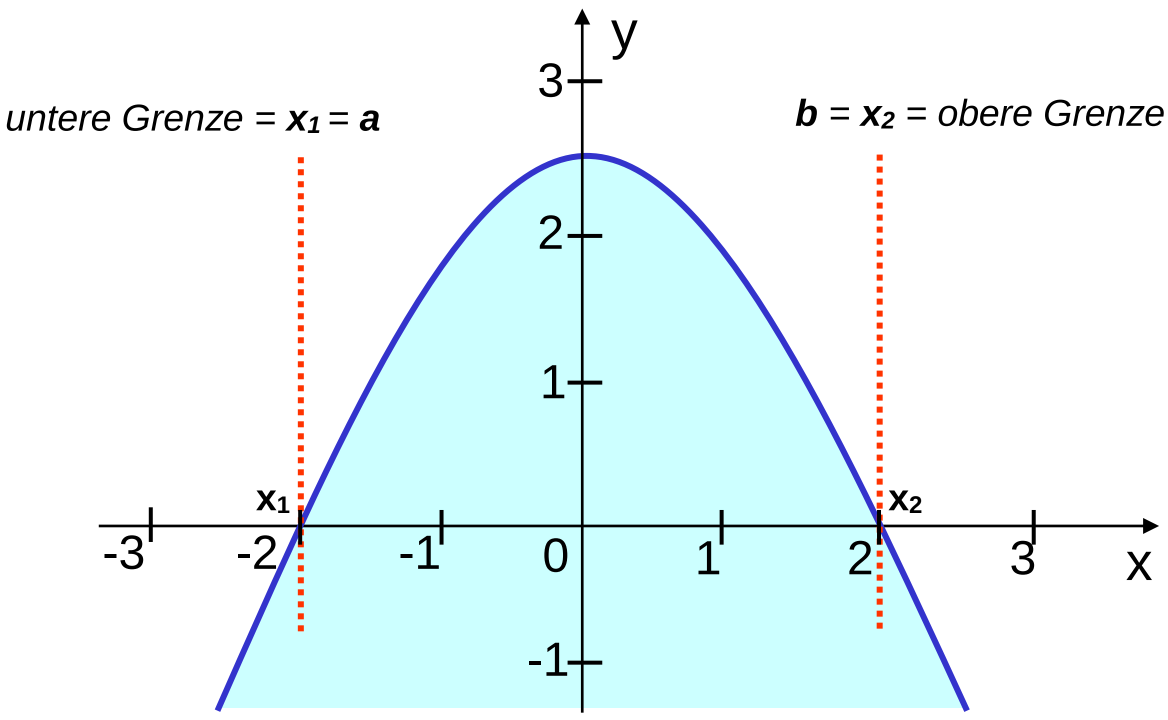


Der Flächeninhalt liegt zwischen den Graphen zweier Funktionen, die sich nicht schneiden.



Das bestimmte Integral

Der Flächeninhalt wird innerhalb eines Intervalls bestimmt. Dieses **Intervall** hat immer eine untere und eine obere Grenze. Die Grenzen ensprechen bestimmten x-Werten, also Stellen auf der **x-Achse**. Innerhalb dieser Intervallgrenzen verläuft die Funktionskurve und damit die Fläche. Weil die Grenzen genau bestimmt sind, spricht man auch von einem bestimmten Integral.



Die Intervallgrenzen eines bestimmten Integrals werden in der Schreibweise verdeutlicht.

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\mathrm{F}(x)]_a^b$$

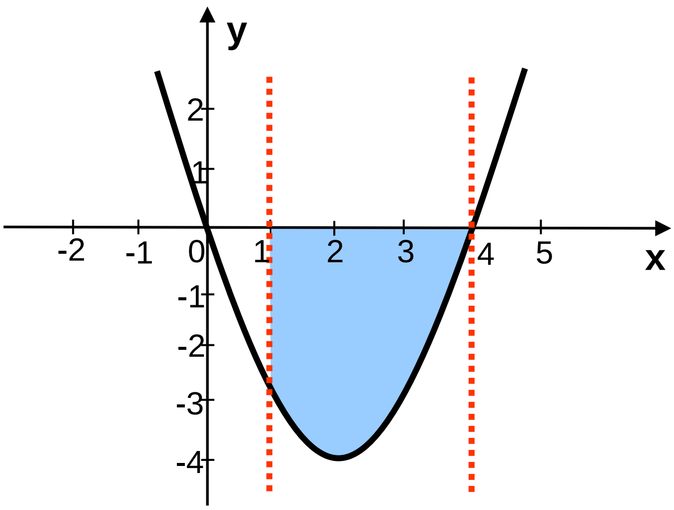
Unter dem Integralzeichen steht immer die untere Grenze, darüber die obere Grenze. Die eckigen Klammern bedeuten: Intervall in den Grenzen von ***a*** bis ***b***. Das große **F** bedeutet: Stammfunktion von ***f*** **(x)**.

Das Berechnen des Flächeninhalts ist nicht schwer, wenn man die Stammfunktion hat. Man setzt in die Stammfunktion die Intervallgrenzen als **x**-Werte ein. Weil stets zwei solche **x**-Werte gegeben sind, erhält man zweimal die Stammfunktion jeweils mit der unteren und mit der oberen Intervallgrenze.
Nun subtrahiert man die Stammfunktion mit der unteren Grenze von der mit der oberen Grenze und erhält eine Zahl, die dem Flächeninhalt entspricht.

$$\mathrm{A} = \int_a^b f(x)\,dx = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Man nennt diese Flächeninhalt-Zahl auch Maßzahl. Sie hat keine Einheit, weil auch die Begrenzungslinien der Fläche keine Einheiten haben.

$f(x) = x^2 - 4x$



Es ist der Flächeninhalt gesucht, den der Graph der Funktion

$f(x) = x^2 - 4x$

im Intervall $[1\,;4]$ mit der x-Achse einschließt.

Die Stammfunktion ist:

$$f(x)\,dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2$$

Die Integration lautet dann:

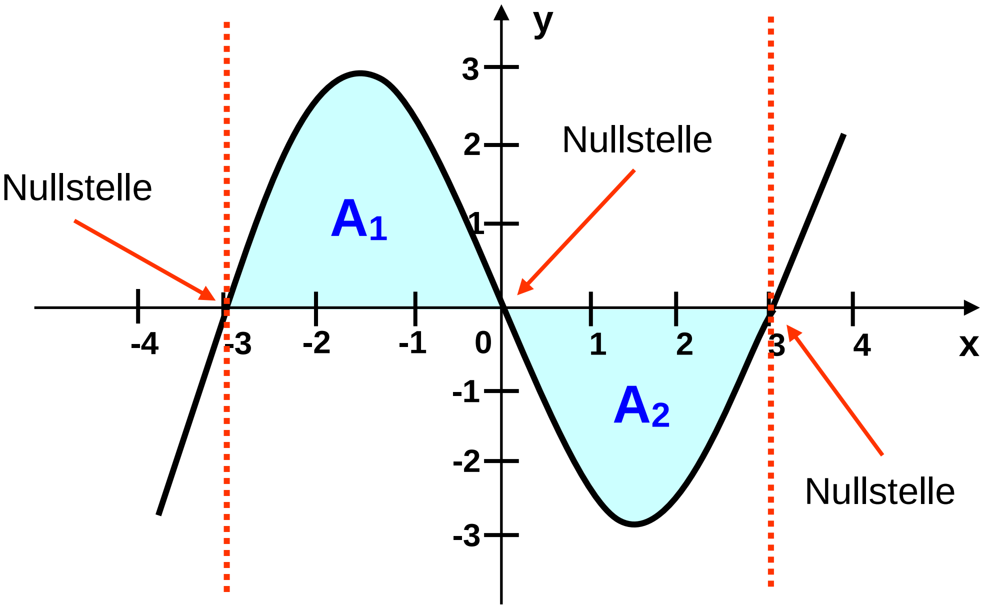
$$\mathrm{A} = \int_1^4 x^2 - 4x = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2\right]_1^4$$

$$= \left[\frac{4^3}{3} - 2 \cdot 4^2\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2\right]$$

$$= |-9|$$

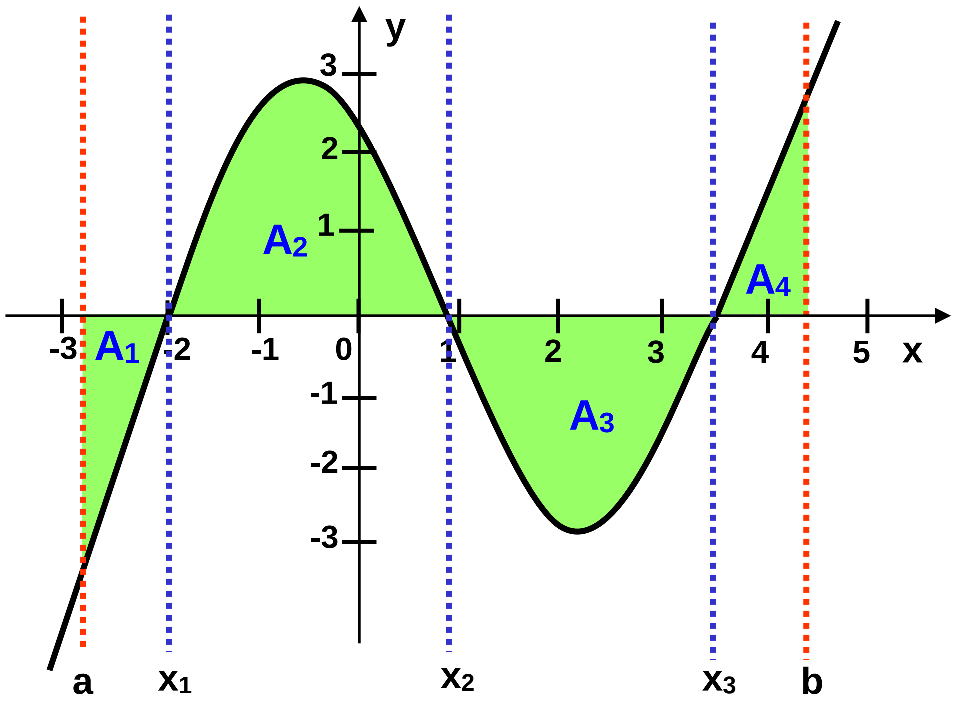
$$= 9$$

Eine Funktion kann mehrere Nullstellen haben und die eingeschlossene Fläche kann über oder unter der **x**-Achse liegen.



Bei der Integralrechnung gibt es keine „negativen“ Flächen, es wird immer der absolute Betrag des Ergebnisses genommen.

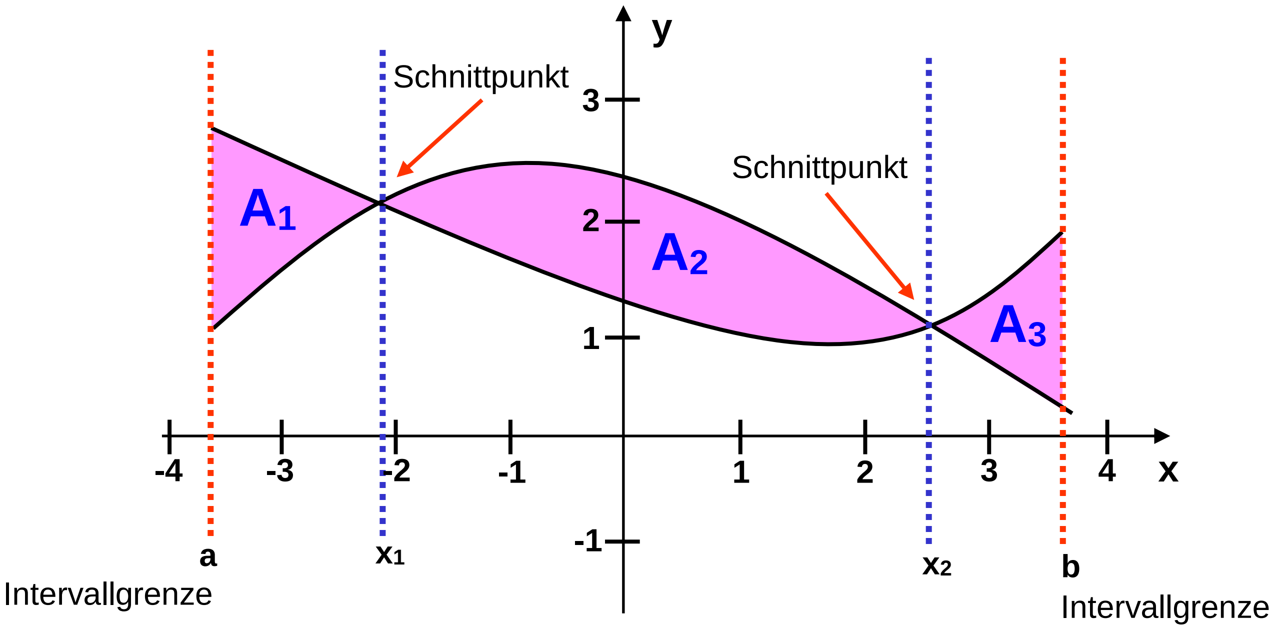
Es kann nicht über Nullstellen hinweg integriert werden. Wenn die Funktion Nullstellen hat, werden die einzelnen Teilflächen jede für sich integriert. Die Teilflächen werden zur Gesamt-Integral-Fläche summiert.



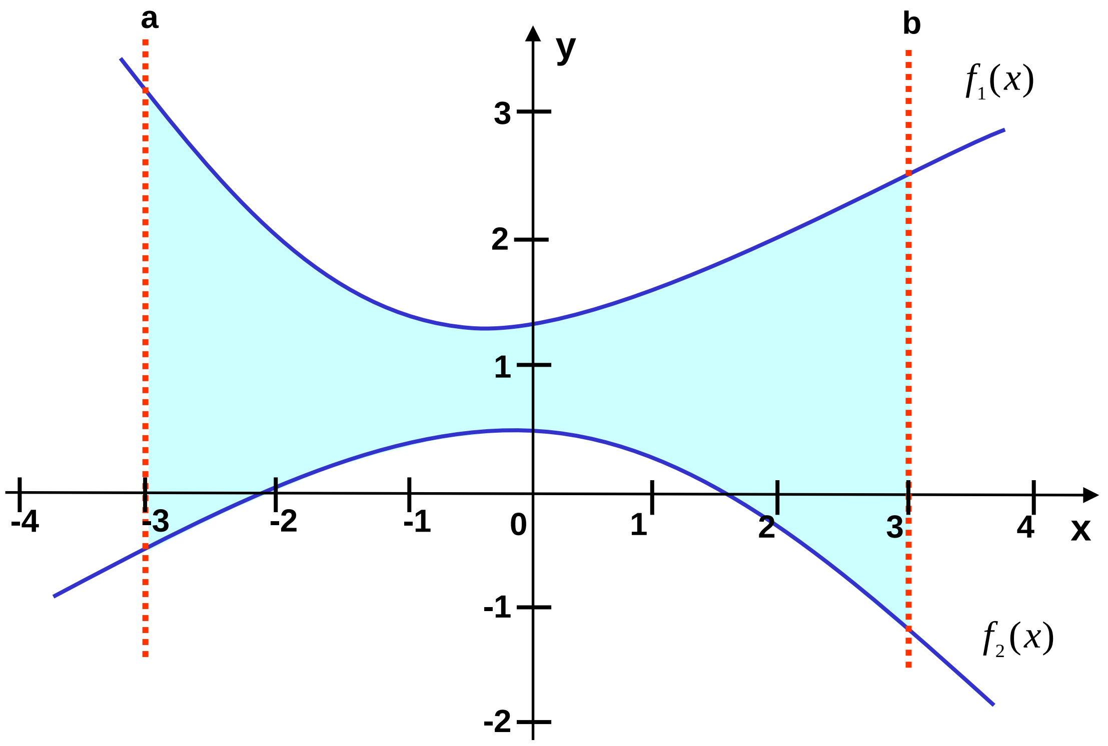
Innerhalb des Intervalls werden die Teilflächen integriert und zur Gesamtfläche summiert.

$$A = \int_{a}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \int_{x_3}^{b} f(x)\,dx$$

Ähnlich wie bei Nullstellen, muss man auch die Fläche integrieren, die von zwei Graphen eingeschlossen wird, die sich schneiden. Auch hier darf nicht über die Schnittpunkte hinweg integriert werden.



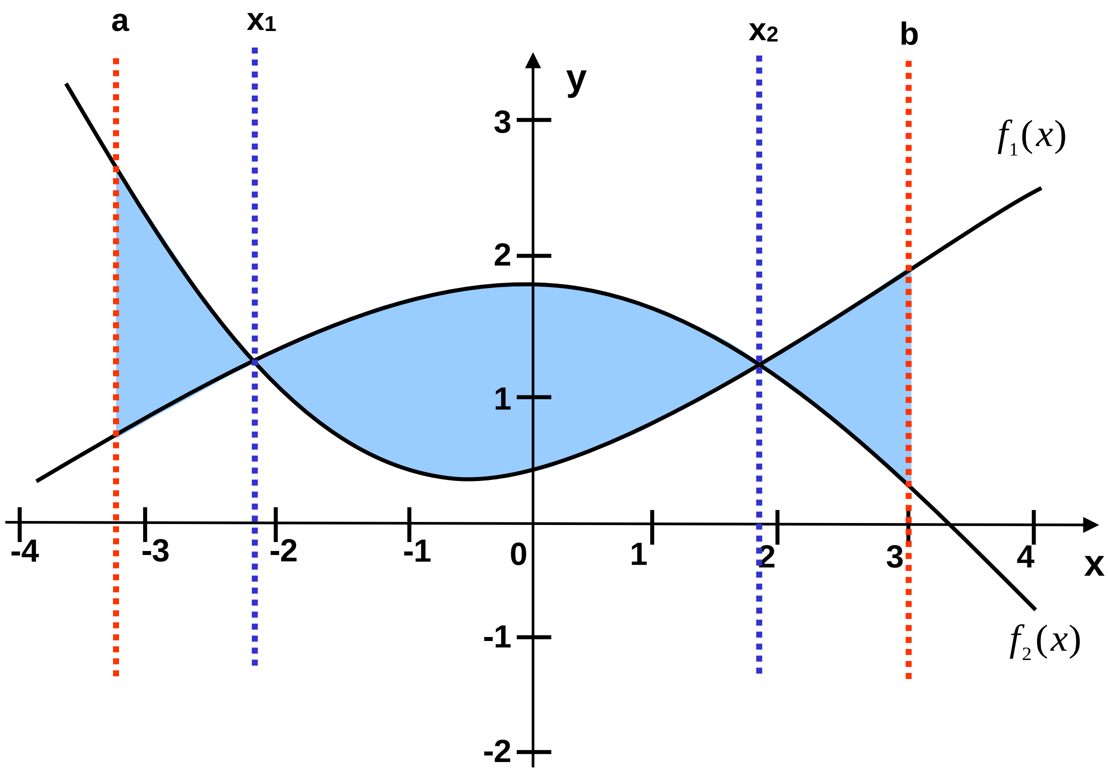
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_b} f(x)dx$$



Bei Funktionen, deren Graphen sich nicht schneiden, wird die Fläche zwischen den Graphen so berechnet:

$$A = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

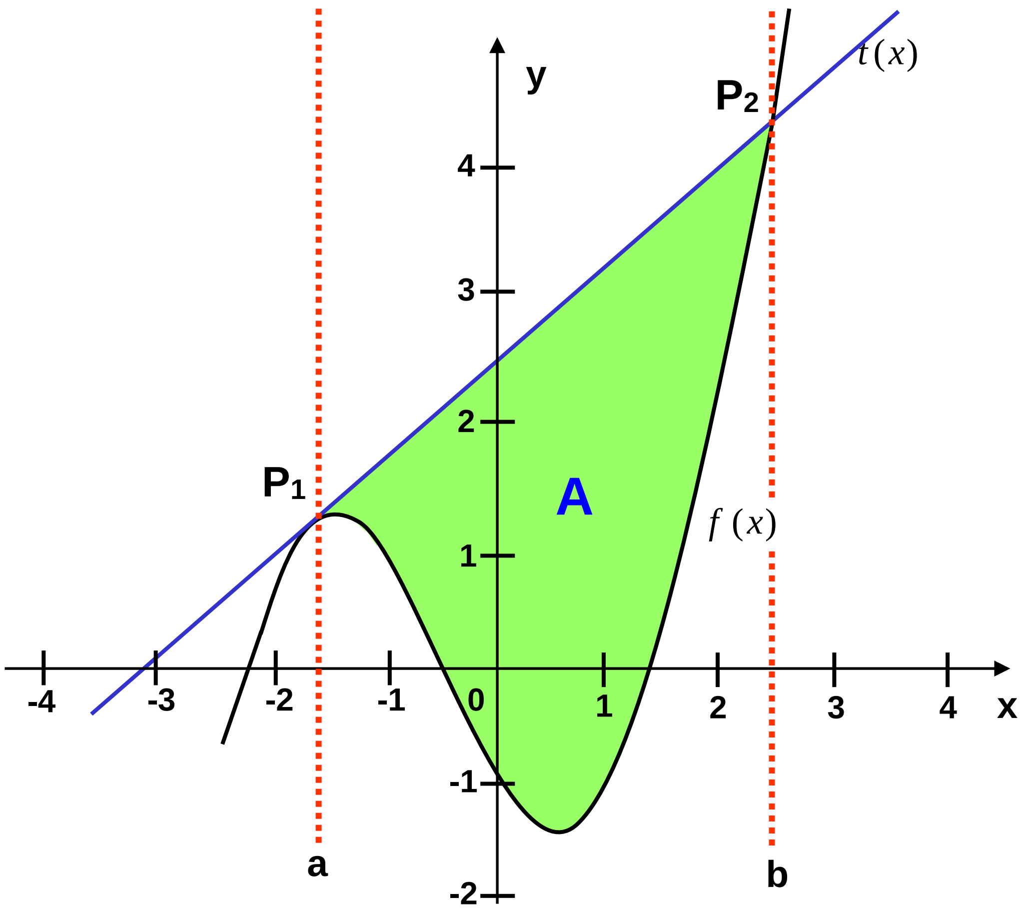
Vor dem Integrieren wird die „untere“ Funktion von der „oberen“ Funktion subtrahiert. Das Ergebnis (Differenz) wird als **eine** Funktion innerhalb des Intervalls integriert.



Bei Funktionen, deren Graphen sich schneiden, wird die Fläche zwischen den Graphen so berechnet:

$$A = \int_a^{x_1} \left| f_1(x) - f_2(x) \right| + \int_{x_1}^{x_2} \left| f_1(x) - f_2(x) \right| + \int_{x_2}^{b} \left| f_1(x) - f_2(x) \right|$$

Für jede Teilfläche wird die „untere“ von der „oberen“ Funktion subtrahiert und die Differenz-Funktion integriert. Alle Teil-Integrale werden summiert. Alle Flächen haben absolute Beträge als Maßzahlen. Es darf nicht über die Schnittpunkte hinweg integriert werden.

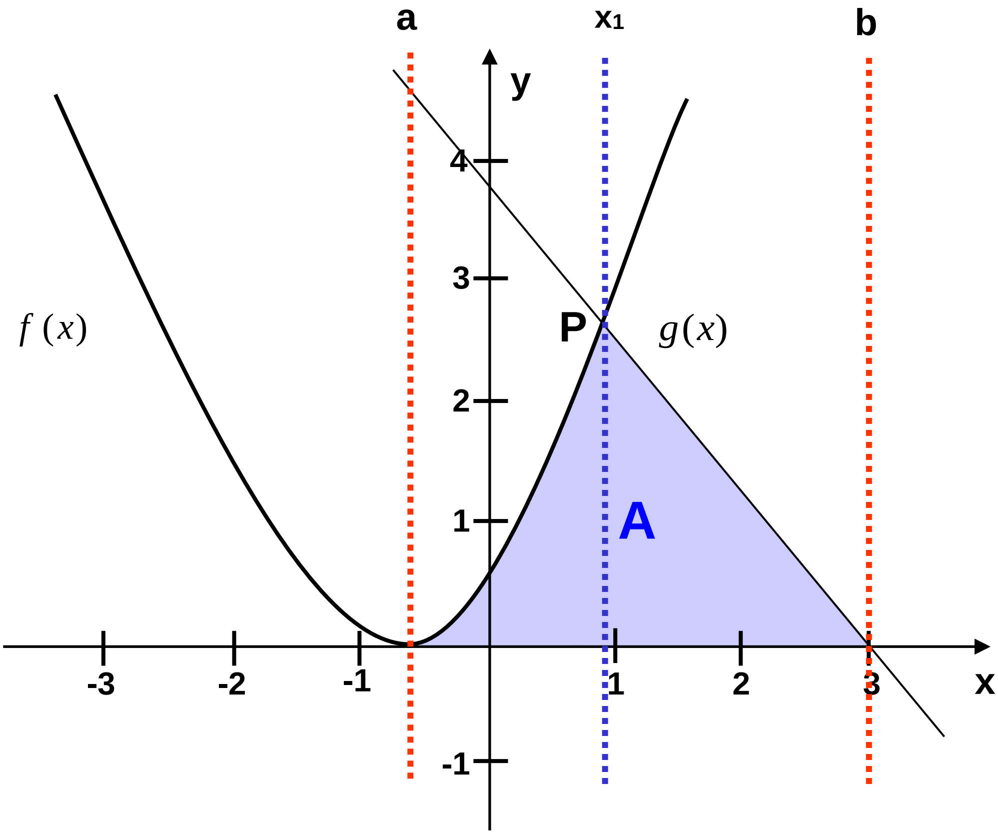


Die Tangente $t(x)$ berührt den Graphen der Funktion $f(x)$ im Punkt **P_1** und schneidet ihn im Punkt **P_2**.

Wie wird die Fläche, die Tangente und Graph einschließen, berechnet?

Über die **1. Ableitung** der Funktion ermittelt man die Gleichung für die Tangente. Durch Gleichsetzen beider Funktionen ermittelt man den Schnittpunkt **P_2**. Damit sind die Intervallgrenzen gegeben. Die Fläche berechnet man mit:

$$A = \int_a^b (t(x) - f(x))\,dx$$



Der Graph der Funktion und eine Gerade schneiden sich in einem Punkt und schließen mit der x-Achse eine Fläche ein. Es müssen die Nullstellen beider Funktionen und ihr Schnittpunkt ermittelt werden. Das Gesamtintervall besteht aus zwei Teilintervallen, die sich im Schnittpunkt „berühren"

$$A = \int_{a}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{b} g(x)\,dx$$