Übungen zur Integralrechnung Klasse 12

① Berechnen Sie:

a) $\int_0^1 (4x+2)^3 dx$ b) $\int_1^0 \frac{1}{(5x+4)^2} dx$ c) $\int_{-3}^0 \sqrt{(1-x^3)} dx$

d) $\int_{3\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{x}\, dx$ e) $\int_{-3}^{\sqrt{9}} \left(\sin(x) - \frac{x}{x^2+1} + x^3 \right)$ f) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(\frac{1}{x^2} + \sqrt{x} \right) dx$

g) $\int_3^9 \left(\frac{1}{x} + x^2 - \sqrt{x} \right) dx - \int_6^9 \frac{1}{x} dx + \int_6^3 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right) dx$ h) $\int_{-3}^{-1} \frac{4}{\sqrt{x}} dx$

② Berechnen Sie aus den folgenden Gleichungen jeweils k:

a) $\int_k^{k+1} (kx + k) dx = 7$ b) $\int_{-k}^{\sqrt{k}} \left(k \cdot x \cdot \sqrt{k-x} \right) dx = 0$

c) $\int_{k-1}^{k} \left(2x + k^2 \right) dx = \frac{3}{10}$

③ Das Schaubild von $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = b$, $b > 0$, begrenzen eine Fläche mit dem Flächeninhalt $A = \frac{1}{2}$ FE vollständig.
Berechnen Sie den Wert von b.

④ Das Schaubild von $f : x \mapsto 2 \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $x = c$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von c.

⑤ Das Schaubild von $f : x \mapsto \frac{3}{2} \cdot \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die x-Achse und die Geraden $x = 1$ und $x = 4$ begrenzen eine Fläche im 1. Feld vollständig. Diese Fläche wird durch die Gerade $y = m \cdot x$ halbiert.
Berechnen Sie den Wert von m.

⑥ Das Schaubild von $f : x \mapsto \sqrt{4x}$ wird an der G eraden mit der Gleichung $y = x$ gespiegelt.
Wie groß ist die Fläche, die von Original und Bild eingeschlossen wird ?

⑦ Leiten Sie die Formel für das Volumen eines geraden Kreiskegels mit der Höhe h und dem Radius r durch eine geeignete Integration her.

⑧ Leiten Sie die Formel für das Volumen einer Kugel mit dem Radius r mithilfe der Integralrechnung her.

⑨ $f_1: x \mapsto \sqrt{x \cdot \left(x^2 - 9\right)}$ und $f_2 = x \mapsto -\sqrt{x \cdot \left(x^2 - 9\right)}$

a) Skizzieren Sie die Schaubilder der Funktionen f_1 und f_2 und geben Sie deren Definitionsmengen sowie die Nullstellen an.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte. Bestimmen Sie auch die Gleichung(en) der Wendetangente(n).

c) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotationn des geschlossenen Kurvenstücks um die x-Achse entsteht.

d) Führen Sie dieselben Untersuchungen für die Funktionen $f_3: x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{x \cdot \left(3 - x\right)^2}$ und $f_4: x \mapsto -\frac{1}{3}\sqrt{x \cdot \left(3 - x\right)^2}$ durch.

⑩ Die Steigung einer Funktion f ist in jedem Punkt des Schaubilds durch $m = \dfrac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ gegeben. Die von den positiven Koordinatenachsen, der Kurve und der Geraden $x = 2$ eingeschlossene Fläche hat den Inhalt $A = 4$ FE.

a) Wie lautet der Funktionsterm von f ?

b) Untersuchen Sie das Schaubild von f auf Nullstellen und Extrema und fertigen Sie eine Skizze an.

⑪ Gegeben ist für $t > 0$ die Funktionenschar $f(t,x) = \sqrt{2tx + t^2 - 1}$ und die Geradenschar $g(t,x) = t \cdot x$.

a) Ermitteln Sie die Definitionsmenge der $f(t,x)$.

b) Ermitteln Sie die Abszissen (x-Werte) der gemeinsamen Punkt der Schaubilder von $f(t,x)$ und $g(t,x)$.
Untersuchen Sie, für welche Werte von t genau 1 gemeinsamer Punkt existiert. Für welche Werte von t existieren genau zwei gemeinsame Punkte ?

c) Prüfen Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Gerade $g(t,x)$ Tangente an das Schaubild von $f(t,x)$ ist.

d) Erarbeiten Sie eine Vorstellung über die Funktionen der Schar $f(t,x)$ und der Geraden $g(t,x)$. Stellen Sie dazu einige Schaubilder zu selbst gewählten Werten für den Parameter t dar.

e) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die die Schaubilder für $t = 0{,}5$ einschließen.

f) Beschaffen Sie sich eine Formel für die Berechnung der Bogenlänge einer Funktion und ermitteln Sie die Länge des Umfangs der in e) berechneten Fläche.

g) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Rotation der oben genannten Fläche um die x-Achse entsteht.

⑫ Gegeben sind die Funktionen f_n durch $f_n(x) = x^n$ und g_n durch $g_n(x) = \sqrt[n]{x}$. Ihre Schaubilder begrenzen im 1. Feld eine Fläche mit dem Inhalt A_n vollständig.
Bestimmen Sie $\lim\limits_{n \to \infty} A_n$ und interpretieren Sie das Ergebnis graphisch.

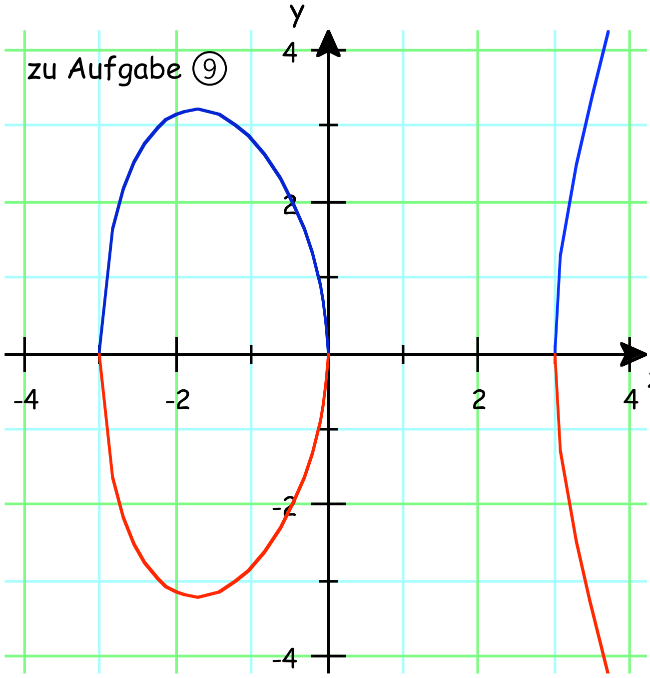
Ergebnisse zu den Aufgaben

①, ② selbst rechnen mit TI 92plus und Nachdenken.

③ $b = 2$; ④ $c = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{6}$ ⑤ $m = \frac{7}{15}$

⑥ $A = \frac{16}{3}$ (FE) ⑦ $\pi\int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx$

⑧ $\pi\int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2 dx$



⑨ a) $D =]-3\,;0] \cup [3\,;\infty[$;

Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 3$

b) HoP(TiP) bei $x = -\sqrt{3}$

WeP bei $x \approx 4{,}4$

Wendetangenten:

$y = 3{,}63(x - 4{,}4) + 6{,}76$

$y = -3{,}63(x - 4{,}4) - 6{,}76$

c) $V = 20{,}25\cdot\pi$

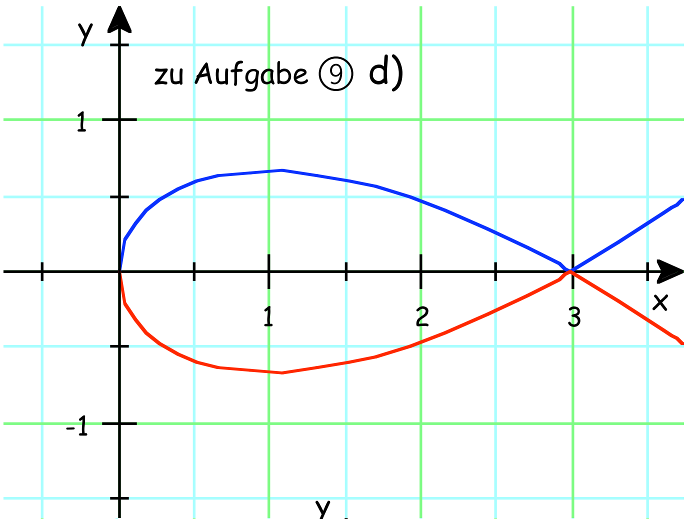
d) $D = [0\,;\infty[$;

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 3$

HoP$(1|\frac{2}{3})$ [TiP$(1|-\frac{2}{3})$]

TiP(3|0) [HoP(3|0)] ; kein WeP.

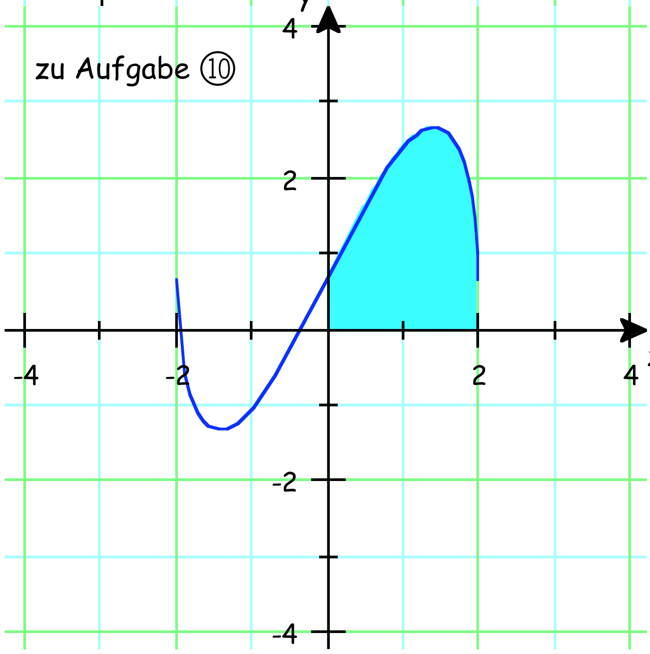
$V = \frac{3}{4}\pi$ (VE)



⑩ a) $f(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2} + \frac{2}{3}$

b) HoP$\left(\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{8}{3}\right)$; TiP$\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,-\frac{4}{3}\right)$

Nullstellen: $x_1 \approx -1{,}97$ und $x_2 \approx -0{,}34$



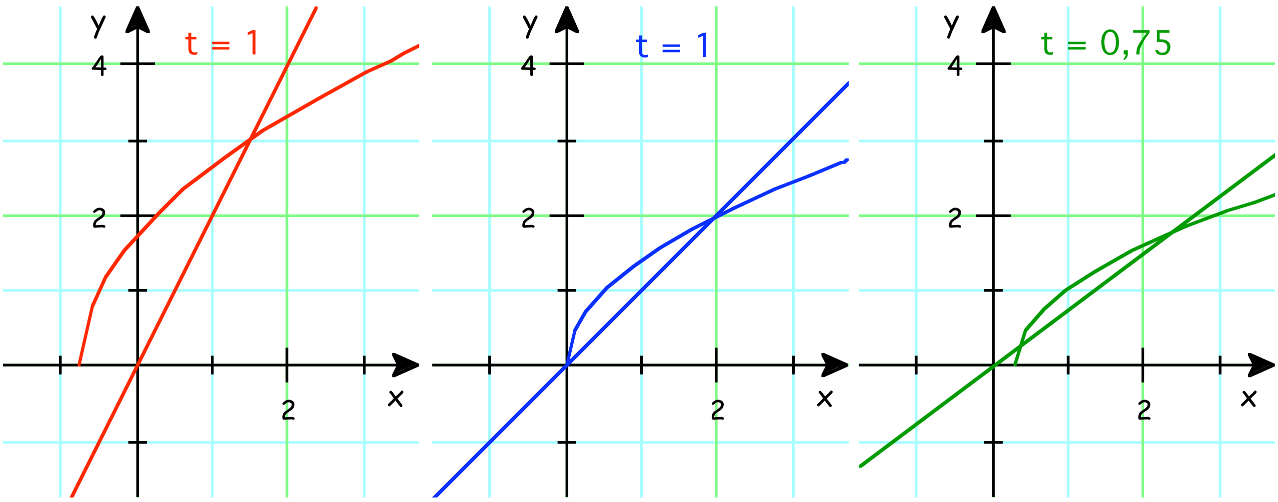
Ergebnisse zu den Aufgaben

⑪ a) $D = \left\{ x \,\middle|\, x \geq \frac{1-t^2}{2t} \right\}$;

b) Nullstellen: $x_1 = \frac{t+1}{t}$; $x_2 = \frac{1-t}{t}$; nur 1 Schnittpunkt für $t > 1$

c) keine der Geraden ist Tangente

d) Beispiele:



e) $A = \frac{1}{6}$;

f) Formel für Bogenlänge zwischen den beiden Kurvenpunkten $A(a|f(a))$ und $B(b|f(b))$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

Umfang: Bogenlänge + Länge der Strecke zwischen den Schnittpunkten ≈ 2,27 + 4,51 (LE)

g) $V = \frac{\pi}{3}$ (VE)

⑫ $A_n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - \frac{2}{n+1}$

$\lim_{n \to \infty} A_n = 1$; die Flächen nähern sich dem Quadrat mit den Ecken (0|0) und (1|1) an.