Mathe Leistungkurs
Analysisklausur I

1. Gebe zur Funktion f eine Stammfunktion an.

$a)\ f(x) = 3 \bullet (2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^5)$

$b)\ f(x) = 4x^4 - 3 \bullet \cos x$

$c)\ f(x) = x^3(x-1)^2$

$d)\ f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

2. Berechne die folgenden Integrale.

$a)\ \int_{\sqrt{2}}^{2} (6x^5 - 2x^3 + x)dx$

$b)\ \int_{-1}^{0} (ax + b)db$

$c)\ \int_{-\pi}^{0} (2\sin x + x)dx$

$d)\ \int_{1}^{2} \frac{4s^8 - 3\sqrt{s}}{6s} ds$

3. Weise die Richtigkeit der Aussage $\int_{0}^{b} x^3 dx = \frac{b^4}{4}$ nach, indem du

a) zunächst die Untersumme und Obersumme $\underline{S}_n$ und $\overline{S}_n$ berechnest.
Hinweis 1: Zum Lösungsansatz gehört eine aussagefähige Zeichnung
Hinweis 2: $1 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

b) Nehme anschließend eine Abschätzung für den gesuchten Flächeninhalt vor.

4. Berechne den Flächeninhalt der Fläche zwischen den Graphen von
$f(x) = \frac{4}{x^2} und g(x) = -x^2 + 5$.
(Stelle den gesuchten Flächeninhalt vor der Berechnung in einer ordentlichen Skizze dar.)

5. Für k>0 ist die Funktion f_k gegeben durch $f_k(x) = k(-x^3 + 3x + 4)$.

Bestimme k so, dass der Graph von f_k mit der Tangente im Hochpunkt eine Fläche mit dem Inhalt 45 FE einschließt.

6. Der Graph einer Funktion $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ hat den Punkt P(0; 1) als Sattelpunkt. Der Flächeninhalt der Fläche, die die Tangente durch diesen Punkt und der Graph von f einschließen, beträgt 5000 FE.
Wie heißt die Funktion?

7. Die grau unterlegten Teile der Schmuckform sollen mit Ballgold belegt werden.
Die Linien sind Parabeln oder Kreise. 1 cm² Blattgold kostet inklusive Belegung 16,98 €.
Wie teuer wird die Blattgoldarbeit? (Zur Skizze siehe Analysisbuch)

8. Gegeben ist die Funktionsschar $f_k(x) = -\frac{1}{48}k^2x^3 + kx$ mit k>0.

a) Der Graph zu f_k schließt im 1. Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Zeige, dass sein Flächeninhalt von k unabhängig ist.

b) Bestimme k>1 so, dass der Graph zu f_1 das Flächenstück halbiert, das der Graph zu f_k im 1. Quadranten mit der x-Achse einschließt.

Lösungen:

1.

$$a)\, f(x) = 3 \bullet (2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^5) = 6 - \frac{3}{2}x^4 + 2x^5$$

$$F(x) = 6x - \frac{3}{2} \bullet \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^6$$

$$F(x) = 6x - \frac{3}{10}x^5 + \frac{1}{3}x^6$$

$$b)\, f(x) = 4x^4 - 3 \bullet \cos x$$

$$F(x) = \frac{4}{5}x^5 - 3 \bullet \sin x$$

$$c)\, f(x) = x^3(x-1)^2 = x^3(x^2 - 2x + 1) = x^5 - 2x^4 + x^3$$

$$F(x) = \frac{1}{6}x^6 - \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4$$

$$d)\, f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$F(x) = x - 2\sqrt{x}$$

2.

$$a) \int_{\sqrt{2}}^{2} (6x^5 - 2x^3 + x)dx = 6(\frac{2^6}{6} - \frac{(\sqrt{2})^6}{6}) - 2(\frac{2^4}{4} - \frac{(\sqrt{2})^4}{4}) + (2-1) = 51$$

$$b) \int_{-1}^{0} (ax + b)db = ax + (\frac{0^2}{2} - \frac{1}{2}) = ax - \frac{1}{2}$$

$$c) \int_{-\pi}^{0} (2\sin x + x)dx = [-2\cos x + \frac{1}{2}x^2]_{-\pi}^{0} = -2 - (2 + 4{,}934802201) = -8{,}93$$

$$F(x) = -2\cos x + \frac{1}{2}x^2$$

$$d) \int_{1}^{2} \frac{4s^8 - 3\sqrt{s}}{6s} ds = \int_{1}^{2} \frac{2}{3}s^7 - \frac{1}{2\sqrt{s}} ds = [\frac{1}{12}s^8 - \sqrt{s}]_{1}^{2} = \frac{1}{12} \bullet 2^8 - \sqrt{2} - (\frac{1}{12} - 1) = 20{,}835$$

$$F(x) = \frac{1}{12}s^8 - \sqrt{s}$$

3.

$$\underline{S_n} = \frac{b}{n} \bullet (\frac{b}{n})^3 + \frac{b}{n} \bullet (\frac{2b}{n})^3 + \ldots + \frac{b}{n} \bullet (\frac{b(n-1)}{n})^3$$

$$= \frac{b^4}{n^4}(1+8+\ldots+(n-1)^3) = \frac{b^4}{n^4} \bullet \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{b^4}{4n^2} \bullet (n^2-2n+1)$$

$$= \frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2}$$

$$\overline{S_n} = \frac{b}{n} \bullet (\frac{b}{n})^3 + \frac{b}{n} \bullet (\frac{2b}{n})^3 + \ldots + \frac{b}{n} \bullet (\frac{bn)}{n})^3$$

$$= \frac{b^4}{n^4}(1+8+\ldots+n^3) = \frac{b^4}{n^4} \bullet \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{b^4}{4n^2} \bullet (n^2+2n+1)$$

$$= \frac{b^4}{4} + \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2}$$

$$n \to \infty; \frac{b^4}{4} - \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2} \to \frac{b^4}{4} und \frac{b^4}{4} + \frac{b^4}{2n} + \frac{b^4}{4n^2} \to \frac{b^4}{4}$$

4.

$$f(x) = \frac{4}{x^2} undg(x) = -x^2 + 5$$

$$\frac{4}{x^2} = -x^2 + 5 \mid \bullet x^2$$

$$4 = -x^4 + 5x^2$$

$$0 = x^4 - 5x^2 + 4$$

$$x^2 = z$$

$$z^2 - 5z + 4 = 0$$

$$z1,2 = 2,5 + -1,5$$

$$z1 = 4 \to x1,2 = + - 2$$

$$z2 = 1 \to x3,4 = + - 1$$

$$A = \int_1^2 (g(x) - f(x))dx \bullet 2$$

$$A = 2\int_1^2 (-x^2 + 5 - \frac{4}{x^2})dx$$

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 5x + \frac{4}{x}$$

$$A = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + 5x + \frac{4}{x}\right]_1^2 = 2(F(2) - F(1))$$

$$= 2[(-\frac{8}{3} + 10 + 2) - (-\frac{1}{3} + 5 + 4)] = \frac{4}{3}$$

5.

$f_k(x) = k(-x^3 + 3x + 4);\ f\,'(x) = k(-3x^2 + 3);\ f\,''(x) = -6kx;\ f\,'''(x) = -6k$

1)

$NotwendigeBedingung:\ f\,'(x) = 0$

$0 = k(-3x^2 + 3)$

$0 = -3x^2 + 3$

$x = + - 1$

$HinreichendeBedingung:\ f\,''(x) \neq 0:$

$f\,''(1) = -6k < 0 : Hp$

$f\,''(-1) = 6k > 0 : Tp$

$H(1;6k)$

2) $Tangente:$

$f\,'(1) = m = 6k$

$t(x) = 6k$

3) $Gleichsetzung$

$6k = k(-x^3 + 3x + 4)$

$-x^3 + 3x - 2 = 0$

$Polynomdivision:$

$x^3 - 3x + 2 : (x - 1) = x^2 + 4x + 4$

$x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$

$x = + - 2$

$45 = \int_2^1 6k + kx^3 - 3kx - 4k)dx$

$6,75k = 45$

$k = 6\frac{2}{3}$

6.

$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d;\ f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c;\ f''(x) = 12x^2 + 6ax + 2b;$
$f'''(x) = 24x + 6a$

$1. f'(0) = 0 \rightarrow 0 = c$
$2. f''(0) = 0 \rightarrow b$
$\rightarrow f(x) = x^4 + ax^3 + d$
$3. f(0) = 1 \rightarrow d = 1$
$\rightarrow f(x) = x^4 + ax^3 + 1;\ f'(x) = 4x^3 + 3ax^2$
$f'(0) = m = 0$
$m = 0; P(0;1)$
$y = mx + b$
$b = 1$
$y = 1$
Schnittpunkte
$1 = x^4 + ax^3 + 1$
$x^4 + ax^3 = 0$
$x^3(x + a) = 0$
$x = 0 \vee x = -a$
$|\int_{-a}^{0} (1 - x^4 - ax^3 - 1)dx| = |\int_{-a}^{0} (-x^4 - ax^3)dx| =$
$a^5 = 10000$
$a = + - 10$

7.

Zuerst berechne ich den Flächeninhalt der blauen Fläche.
Dazu wende ich die Formel $A = \pi(r_2^2 - r_1^2)$ an, wobei r_2=1 cm und r_1=0,5 cm ist.

A_1=2,3562 cm²

Nun benötige ich zwei Funktionsgleichungen, um den grünen Flächeninhalt A_2 berechnen zu können. Da es sich um Parabeln handelt, bestimme ich erst einmal die Scheitelpunkte. Diese liegen bei S(0; 1,5) und bei S(0; 1).
Nun sind diese Parabeln aber noch um einen bestimmten Faktor gestreckt oder gestaucht. Um diesen zu berechnen setze ich in die Funktion f(x)=ax²+1,5 den Punkt P(3; 0) ein und berechne a. In die Funktion f(x)=ax²+1 setze ich den Punkt P_2(2,5; 0) ein. (siehe Zeichnung)

$$0 = 9a + 1,5$$
$$a = -0,17$$
$$f(x) = -0,17x^2 + 1,5$$

$$0 = 6,25a + 1$$
$$a = -0,16$$
$$f(x) = -0,16x^2 + 1$$

Nun bestimme ich den Flächeninhalt der grünen Fläche A_2 und multipliziere diesen mit 2, da hier Symmetrie vorliegt und beide Teilstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß sind.

Dazu berechne ich zuerst den Flächeninhalt A_3.

$$A = \int_{-2,5}^{0} (-0,16x^2 + 1)dx = 1,67$$

Nun berechne ich A_4 (die Fläche zwischen x-Achse, der Funktion f im 4. Quadranten.).

$$A = \int_{-3}^{0} (-0,17x^2 + 1,5)dx = 2,97$$

Rechteck A=4,5 cm²

A=1,3 cm²

A=5,2 cm²
A_{gesamt}=5,2+2,3562=7,5562

$$7,5562cm^2 \bullet 16,98€/cm^2 = 128,30€$$

8.

1. Berechnung der Nullstellen:

$$f_k(x) = -\frac{1}{48}k^2x^3 + kx$$

$$0 = -\frac{1}{48}k^2x^3 + kx$$

$$x = +-\sqrt{\frac{48}{k}}$$

2. Berechnung des Flächeninhalts A:

$$A = \int_0^{\sqrt{\frac{48}{k}}} (-\frac{1}{48}k^2x^3 + kx)dx = -\frac{1}{48} \bullet \frac{48^2}{4} + 24 = 12FE$$

Wie man sieht, wird das k hier weggekürzt, damit hat k auf den Flächeninhalt keinen Einfluss.

b)

Wie aus Aufgabe 8a) bekannt ist, ist der Flächeninhalt unabhängig von k A=12FE.
Nun soll dieser Flächeninhalt halbiert werden, also A=6

1. Berechnung der Schnittpunkt

$$-\frac{1}{48}k^2x^3 + kx = -\frac{1}{48}x^3 + x$$

$$x = +-\sqrt{\frac{48}{1+k}}$$

k=3