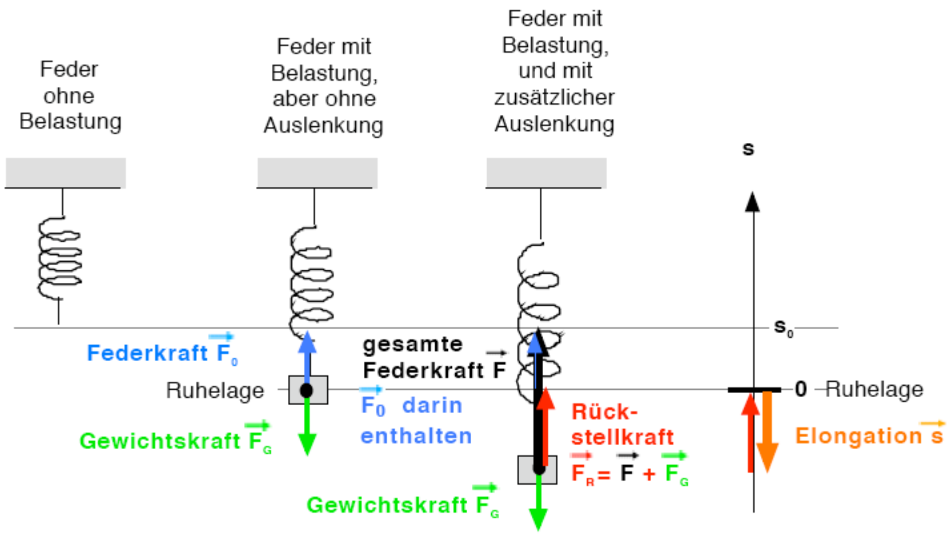
Das Federpendel



Die Kraft $\vec{F}_0$ kompensiert die Gewichtskraft, die Rückstellkraft $\vec{F}_R$ bewirkt eine Beschleunigung des Körpers zur Ruhelage hin.

Befindet sich der Körper an der Ortskoordinate s so gilt für die **Koordinaten** der Kräfte:

$$F = -D(s - s_0).$$
$$-F_G = F_0 = -D\cdot(-s_0) = Ds_0$$
$$F_R = F + F_G = F - F_0$$
$$F_R = -D(s - s_0) - Ds_0 = -Ds.$$

Die *Rückstellkraft ist also proportional zur Auslenkung* aus der Ruhelage. Dies ist das *Kennzeichen* für eine **harmonische** Schwingung.
Nach NEWTON gilt für die beschleunigende Kraft $F_a = ma = m\ddot{s}$.
Es ergibt sich folgende **Differentialgleichung** der harmonischen Schwingung:

$$m\ddot{s} = -Ds \Rightarrow m\ddot{s} + Ds = 0 \Rightarrow \ddot{s} = -\frac{D}{m}s.$$

Während bei einer „normalen“ Gleichung mit einer Unbekannten x als Lösung ein oder mehrere Zahlenwerte für x gesucht sind, sucht man bei einer Differentialgleichung eine Funktion , hier s(t), die die Differentialgleichung für alle Zeitpunkte erfüllt.
Das Ergebnis des Experiments legt folgenden Lösungsansatz für s(t) nahe:

$$s(t) = A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

Differentiation nach der Kettenregel ergibt:

$$\dot{s}(t) = \omega A\cdot\cos(\omega t + \varphi),\quad \ddot{s}(t) = -\omega^2 A\cdot\sin(\omega t + \varphi)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$m(-\omega^2 A\sin(\omega t + \varphi)) + DA\sin(\omega t + \varphi) = 0 \Rightarrow$$
$$(-m\omega^2 + D)\cdot A\sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Diese Gleichung ist nur dann für alle Zeitpunkte erfüllt, wenn der Klammerterm gleich null ist, also

$$-m\omega^2 + D = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{D}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Die Kreisfrequenz ω und die Schwingungsdauer T liegen damit fest. Die anderen beiden Konstanten A und φ werden durch die Anfangsbedingungen festgelegt (siehe Aufgabenbeispiel).