2. Klausur in Mathematik - Kurs 12/I

Name: ....

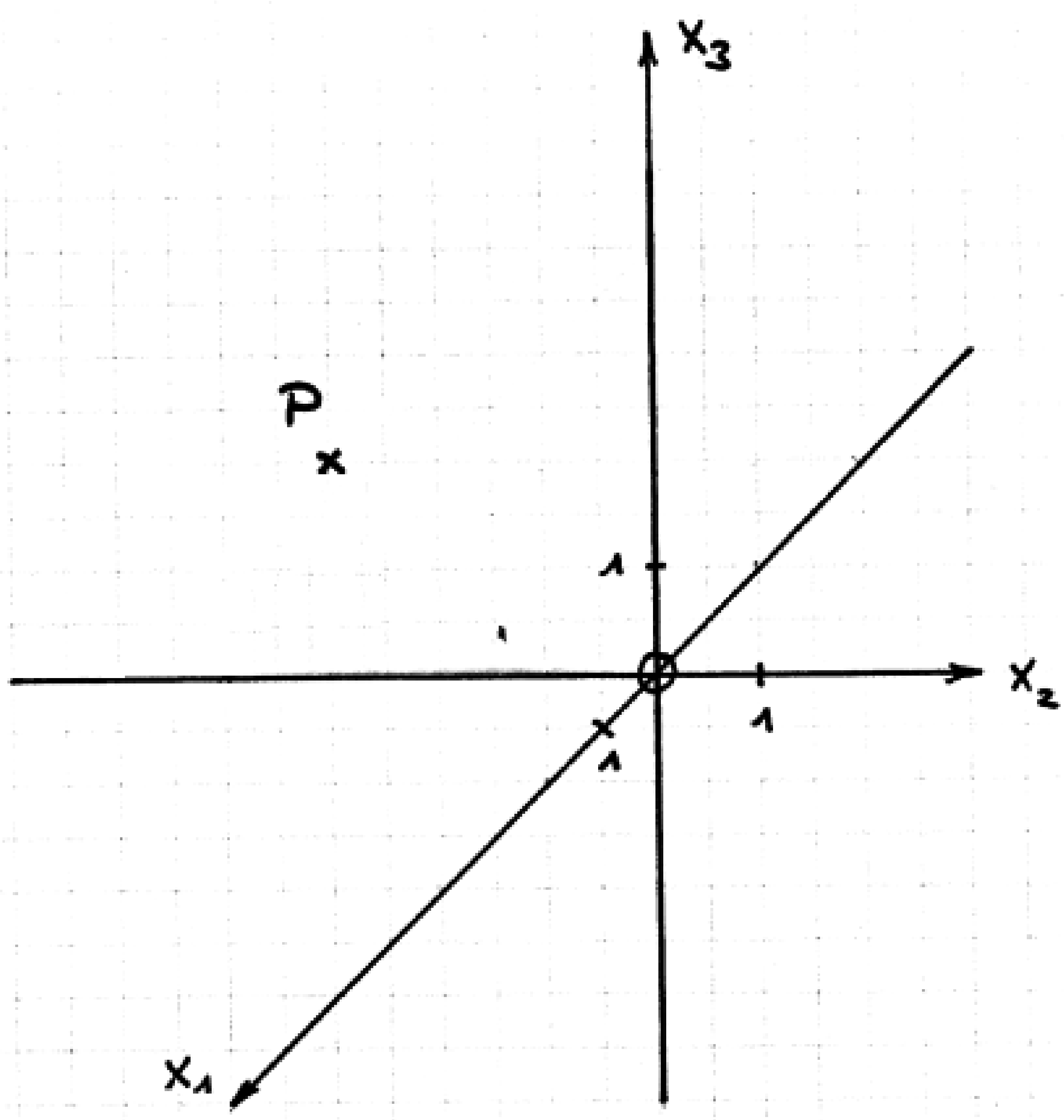
Teil 1
Dieser Teil ist ohne Hilfsmittel zu bearbeiten.
Mit Teil 2 darf erst nach Abgabe von Teil 1 begonnen werden.

Aufgabe 1

In nachstehendes Koordinatensystem ist ein Punkt P eingezeichnet. Welche Koordinaten hat dieser Punkt, wenn er

a) in der x_1x_2-Ebene,
b) in der x_1x_3-Ebene oder
c) in der x_2x_3-Ebene liegt?

d) Kann die x_2-Koordinate von P den Wert –4 annehmen? Falls ja, welche Werte haben dann die x_1- und die x_3-Koordinate von P?



Aufgabe 2

Die Punkte P(5/0/0), Q(0/4/0) und R(0/0/3) sind Eckpunkte eines Dreiecks.

a) Veranschauliche anhand einer geeigneten Zeichnung die Lage dieses Dreiecks im Koordinatensystem.

b) Bestimme durch Rechnung einen 4. Punkt A, sodass das Viereck PAQR ein Parallelogramm bildet. Überprüfe die Richtigkeit deines Ergebnisses in der Zeichnung von Teilaufgabe a).

Aufgabe 3

a) Zeichne ein geeignetes Schrägbild eines Quaders mit den Kantenvektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}, \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

b) Welche Koordinaten hat der Punkt, der durch eine Punktspiegelung des Eckpunktes „vorne, rechts, unten“ am Eckpunkt „hinten, links, oben“ entsteht?

c) Zeichne in das Schrägbild deines Quaders den Pfeil ein, der vom Mittelpunkt der rechten Seitenfläche zum Mittelpunkt der Kante „vorne, unten“ zeigt. Bestimme die Koordinaten dieses Pfeils. Es muss nachvollziehbar sein, wie du zu deinem Ergebnis kommst.

Teil 2

Nach Abgabe von Teil 1 dürfen jetzt GTR und Formelsammlung benützt werden. Beim GTR wird davon ausgegangen, dass vor seiner Benutzung ein vollständiges Reset durchgeführt wurde.

Aufgabe 4

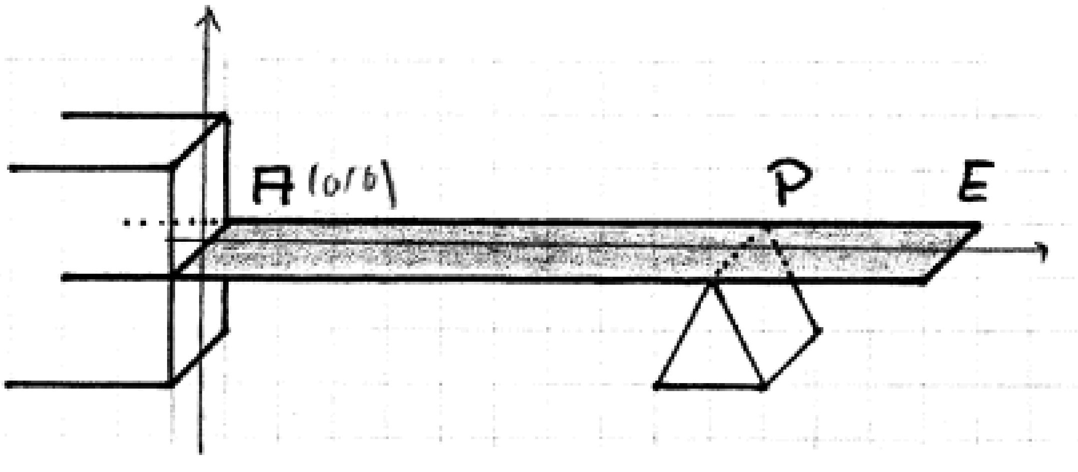
Ein Luftschiff, das eine Eigengeschwindigkeit von 50 km/h entwickelt, soll bei einem Südwestwind der Stärke 20 km/h exakt von Nord nach Süd fliegen. Fertige zu dieser Aufgabe eine geeignete Skizze an und berechne dann

a) den Winkel, um den der Pilot sein Luftschiff gegen den Wind drehen muss und

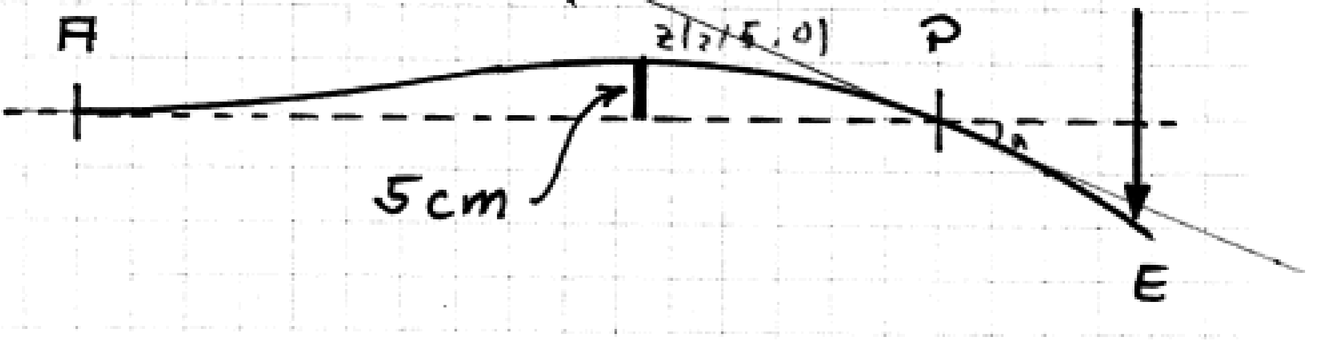
b) die Geschwindigkeit, die das Luftschiff über Grund besitzt.

Aufgabe 5

Ein Brett ist in A horizontal eingespannt und liegt in P lose auf (vgl. Skizze). Die Stelle P besitzt von A eine horizontale Entfernung von 2,4 m.



Nun stellt sich eine Person auf das Ende E des Bretts. Dadurch erfährt das Brett eine Verbiegung, die im höchsten Punkt 5 cm beträgt.



a) Stelle in einem geeignet gewählten Koordinatensystem eine Gleichung für die Biegekurve des Bretts auf. Es wird erwartet, dass du deine Vorgehensweise klar dokumentierst.

b) Um welchen Winkel wird das Brett in P nach unten gebogen?

Aufgabe 6

Nachstehend findest du Informationen über Ebbe und Flut in Bremerhaven, veröffentlicht vom Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie:

Vorausberechnung der astronomischen Gezeiten

Pegelort :	**Bremerhaven, Alter Leuchtturm**
Position :	53°32'42"N 8°34'05"E
Zeitangabe :	Gesetzliche Zeit Sommerhalbjahr => MESZ / Winterhalbjahr => MEZ
Wasserstand bezogen auf :	Normalnull

Datum			Zeit	Wasserstand (m)
Mo	08.12.	HW	00:53	1.9
Mo	08.12.	NW	07:10	-1.9
Mo	08.12.	HW	13:09	1.9
Mo	08.12.	NW	19:27	-1.9
Di	09.12.	HW	01:27	1.9
Di	09.12.	NW	07:48	-1.9
Di	09.12.	HW	13:44	1.9
Di	09.12.	NW	20:00	-1.9
Mi	10.12.	HW	01:56	2.0
Mi	10.12.	NW	08:20	-2.0
Mi	10.12.	HW	14:18	1.8
Mi	10.12.	NW	20:29	-1.9

HW Hochwasser (Flut)

NW Niedrigwasser (Ebbe)

Das Bundesamt für Seeschifffahrt und Hydrographie übernimmt für die hier wiedergegebenen Informationen keine Gewähr.

a) Zeichne ein Schaubild zum Gezeitenverlauf im angegebenen Zeitraum. Bestimme aus dem Datenmaterial die **Tidendauer** – das ist der zeitliche Abstand aufeinanderfolgender Wasserhochstände – und den **Tidenhub** – das ist der Höhenunterschied zwischen Wasserhochstand und Wasserniedrigstand. Stelle eine Funktion auf, die den Wasserstand – bezogen auf Normalnull - in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

b) Die von dir aufgestellte Funktion besitzt Stellen, an denen sich der Funktionswert (also der Wasserstand) am stärksten **ändert**. Bestimme für eine solche Stelle die Änderungsrate (also die auf eine Zeiteinheit bezogene Änderung des Wasserstandes).

c) Äußere dich kurz zum Gezeitengeschehen in Bremerhaven am Ende der heutigen Klausur, also gegen 11:20 Uhr.

Viel Erfolg !

Mathe Klausur Nr. 2

①

a) $P_1(-4/-5/0)$

b) $P_2(6/0/5)$

c) $P_3(0/-3/2)$

d) Ja, kann sie:

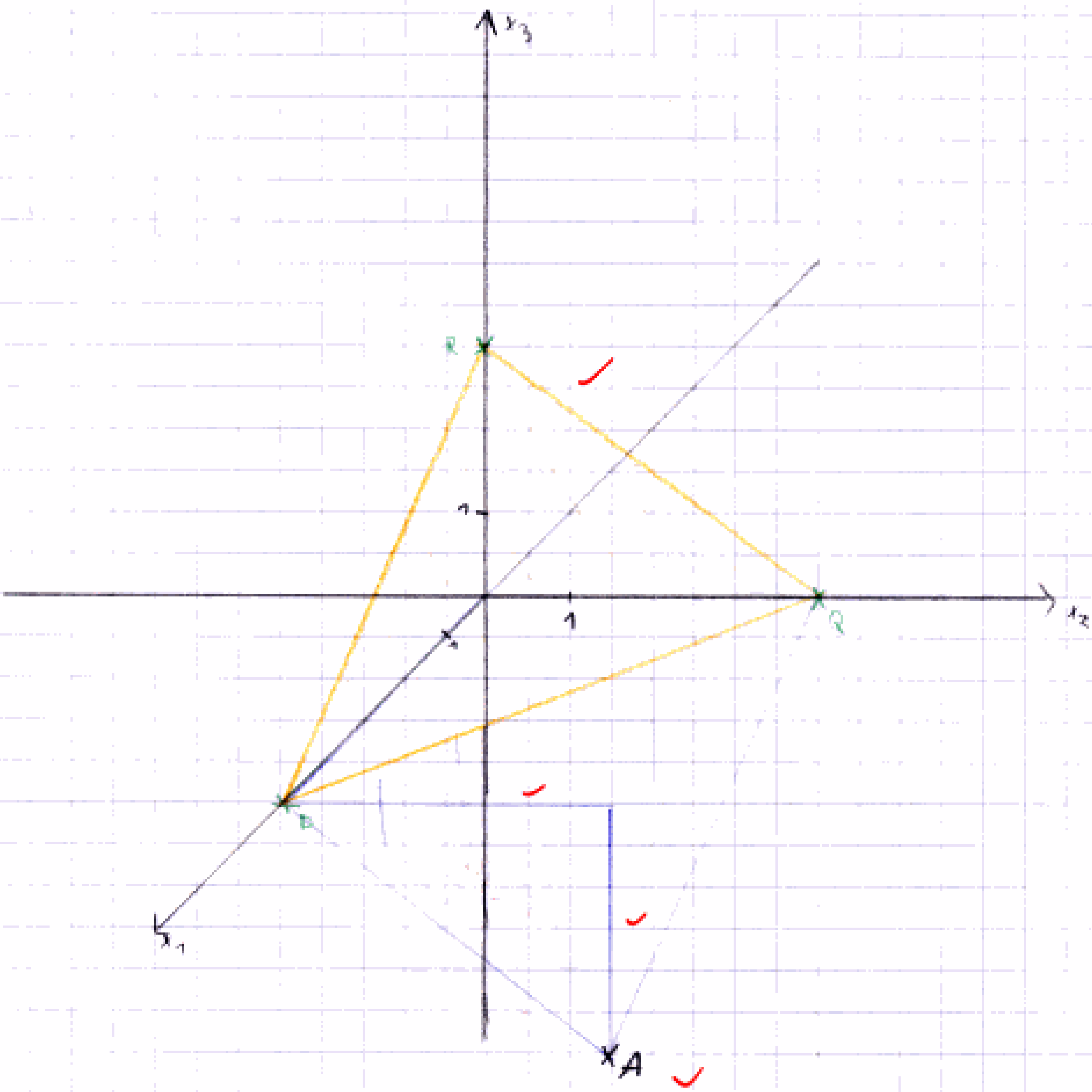
die x_1-Koordinate hätte dann den Wert -2, die x_3-Koordinate den Wert 1

Der Punkt P_4 wäre also

$P_4(-2/-4/1)$

6

②



5 1/2

Bedingung für Parallelogramm:

$$\vec{RQ} = \vec{PA}$$

$$\vec{RQ} = \begin{pmatrix} q_1 - r_1 \\ q_2 - r_2 \\ q_3 - r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{PA} = \begin{pmatrix} a_1 - p_1 \\ a_2 - p_2 \\ a_3 - p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 5 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

5

$a_1 = 5$

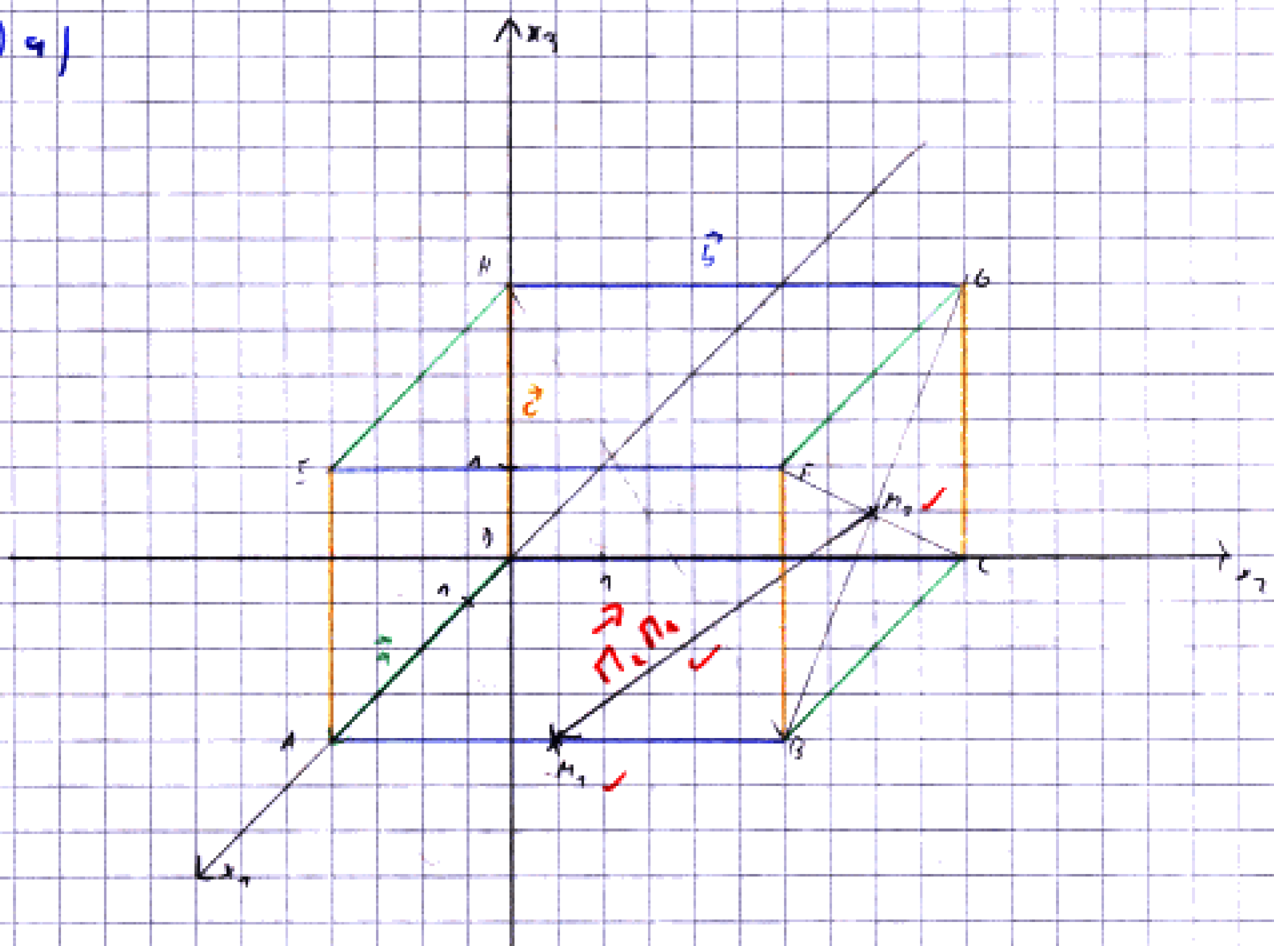
$a_2 = 4$

$a_3 = -3$

=> Der Punkt A muss die Koordinaten $A(5|4|-3)$ haben, damit das Viereck PAQR ein Parallelogramm bildet.

Die zeichnerische Lösung bestätigt dies.

③ a)



4

3b)

$3\frac{1}{2}$

Er hat die Koordinaten

$B_2\ (-4\,/-5\,/\ 6)$ ✓

c) Koordinaten von M_2: $M_2\,(2\,/\,5\,/\,1{,}5)$ ✓

" " M_1: $M_1\,(4\,/\,2{,}5\,/\,0)$ ✓

$6\frac{1}{2}$

Gesucht: Pfeil $\overrightarrow{M_2 M_1}$

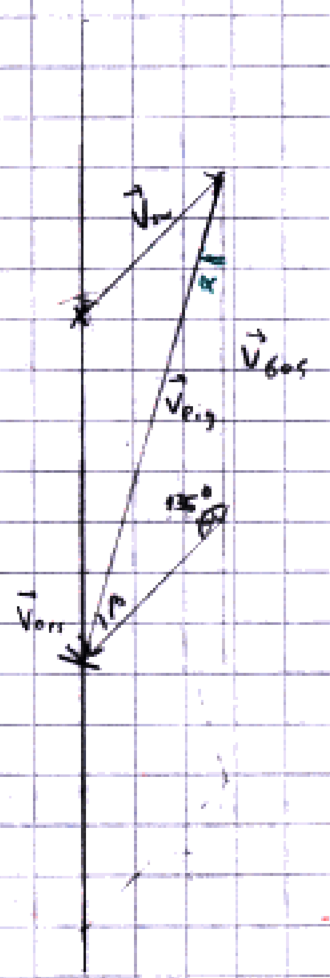
$$\overrightarrow{M_2 M_1} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 2{,}5-5 \\ 0-1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2{,}5 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (m_1)_1-(m_2)_1 \\ (m_1)_2-(m_2)_2 \\ (m_1)_3-(m_2)_3 \end{pmatrix}$$ ✓

8

Mathe Klausur 2 Teil 2

④ a) $V_{eig} = 50\,\frac{km}{h}$; $V_{sw} = 20\,\frac{km}{h}$

Skizze:



Richtig, allerdings unübersichtliche Skizze!

8

Gesucht: α

Berechnen mit Sinussatz:

$$\frac{V_{eig}}{\sin 135°} = \frac{V_{sw}}{\sin \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{V_{sw} \cdot \sin 135°}{V_{eig}}$$

$$\sin \alpha \approx 0{,}2828$$

$$\alpha \approx 16{,}43°$$

Antwort:

Es muss den Kurs 16,43° westlicher ändern!

b) sin-Satz ist einfacher!

Kosinussatz:

Ges: V_{Ges} $\beta = 180° - 135° - 16,43° = 28,57°$

4 1/2

$V_{Ges}^2 = V_{Eig}^2 + V_{SW}^2 - 2 \cdot V_{Eig} \cdot V_{SW} \cdot \cos\beta$

$V_{Ges}^2 = 1143,53 \left(\frac{km}{h}\right)^2 \quad | \sqrt{\ }$

$V_{Ges} = 33,816 \frac{km}{h}$

$\Rightarrow$ Die Geschwindigkeit über Grund beträgt $33,816 \frac{km}{h}$.

5

Geg:

$A(0/0;0)$ $P(240/0)$

$Z(2/5;0)$

$\Rightarrow$ Ganzrationale Funktion 3. Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

a)

$A(0/0)$: $d = 0$

$A(0/0;\underline{\underline{0}})$: $c = 0$

Verbleibend:

$f(x) = ax^3 + bx^2$

$0 = 240^3 a + 240^2 b \quad | - 240^2 b \quad | \leftrightarrow$

$240^2 b = -240^3 a \quad | : (240)^2$

$b = -240 a$

12

$f(x) = ax^3 - 240 a x^2$

$f'(x) = 3ax^2 - 480 ax$

2 halbe Bedingungen:

$Z(z/5;0)$

Sesse: $3az$ ausklammern!

$$0 = 3az^2 - 480az \quad | + 480az$$

$$480az = 3az^2 \quad | :3$$

$$160az = az^2 \quad | :a$$

$$160z = z^2 \quad | :z$$

$$160 = z$$ ✓

$\Rightarrow$ Der Punkt Z hat die Koordinaten $Z(160/5;0)$ ✓

$$5 = a(160)^3 - 240a(160)^2$$

$$5 = -2048000a$$

$$a = -\frac{1}{409600}$$ ✓

$$b = -240a = \frac{3}{5120}$$ ✓

$\rightarrow$ Die Funktion lautet:

$$f(x) = -\frac{1}{409600}x^3 + \frac{3}{5120}x^2$$ ✓

b)

$$f'(x) = -\frac{3}{409600}x^2 + \frac{3}{2560}x$$ ✓

$$f'(240) = -\frac{3}{409600}\cdot(240)^2 + \frac{3\cdot 240}{2560}$$

$$= -\frac{9}{64}$$ ✓

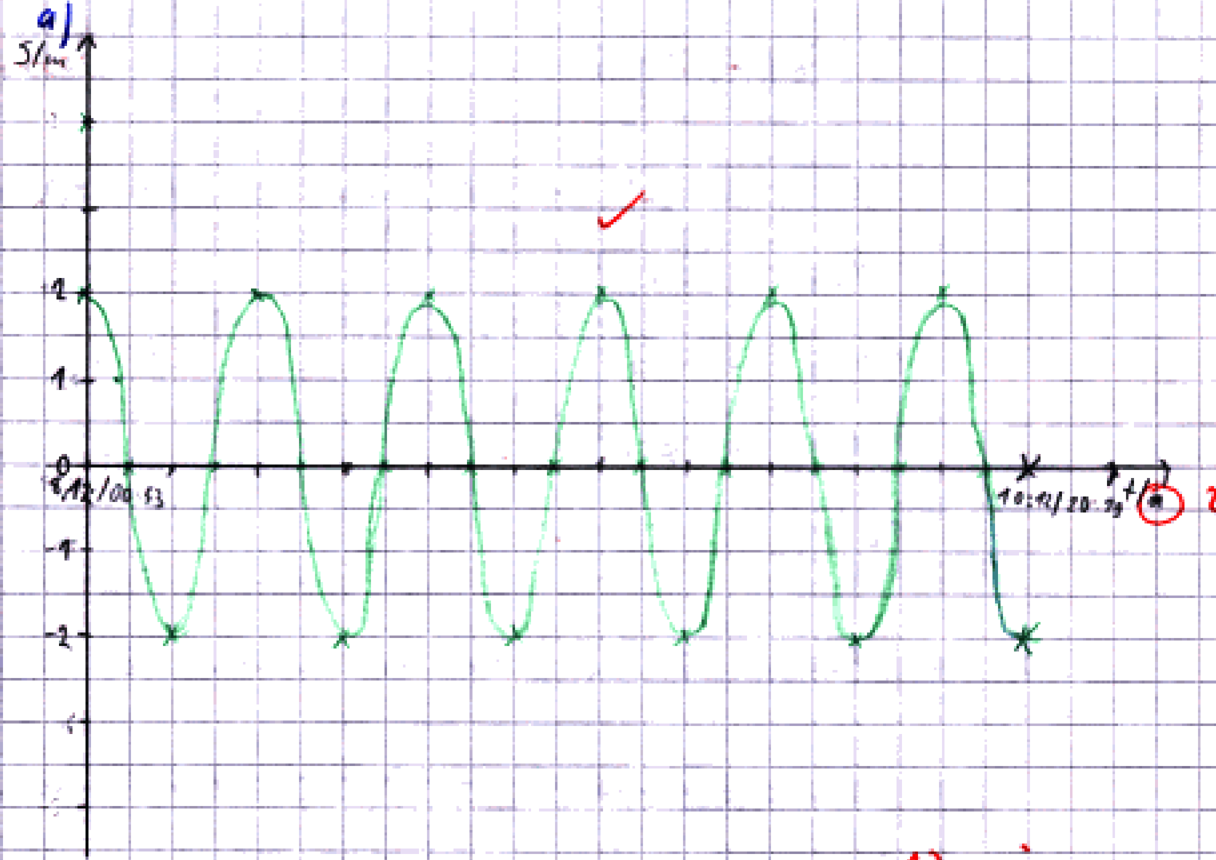
Z: $3^1/_2$

$m_P = -\frac{9}{64}$ ✓ $\alpha = \sin^{-1}(m) \approx 8{,}084°$ ✓

$\Rightarrow$ Das Brett wird in P um $8{,}084°$ nach unten gebogen. ✓

⑥

a)



10 1/2

17 min

Tidendauer ≈ ~~738~~ 737 min ≈ 12 h 20 min ✓

Tidenhub ≈ 4 m 3,8 m zu ungenau!

Funktion:

$s_m = \frac{1}{2} \cdot 4\,m = 2\,m$ (✓)

$T = 737\,min$ ✓   t in Minuten ✓

$s(t) = 2\,m \cdot \cos \frac{2\pi}{737\,min} \cdot t$ ✓

~~v(t)~~

b) f' Änderungsrate: Ableiten ✓

$v(t) = -2\,m \cdot \frac{2\pi}{737\,min} \cdot \sin \frac{2\pi}{737\,min} t$ Einheiten!

~~$v(737)$~~ =

4 1/2

$v(\underbrace{184{,}25}_{\frac{1}{4}T}) = -2 \cdot \frac{2\pi}{737} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{737} \cdot 184{,}25\right)$ ✓

$\approx$ ~~$-2{,}0085253$~~

$\approx 0{,}1705$ ✓

=> Der Wasserstand ändert sich an dem Zeitpunkt mit der größten Änderung um ~~0,...~~ 1,705 cm/min ≈ 1 m/h

Der Pegel zu diesen Zeitpunkten beträgt 0 m über NN ✓

⑥ c) 10.12. 11:20 Uhr

$t = 564$ (Nullpunkt bei: 10.12. 1:56)

$s(564) = 2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{737} \cdot 564\right)$

$s(564) = 0{,}1915$

Z: +2

⇒ Um 11:20 beträgt der Wasserstand im Bremerhaven + 0,1915 m über Normalnull.

$v(564) = -2 \cdot \frac{2\pi}{737} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{737} \cdot 564\right)$

$= 0{,}01697$

→ Der Pegel steigt zu diesem Zeitpunkt um 1,697 cm / min

≈ 1,02 m / h

Teil 1: 30 ½ von 30 ½

70 Punkte von 70 ½

Z: +5 ½

sgt (15 P)