Name:	Klausur	12/2-2
Verrechnungspunkte: 36/38	Note: 15	Mündliche Note:

Achte bei allen Aufgaben auf eine übersichtliche Darstellung. Der Rechenweg muss nachvollziehbar sein.

Teil 1:
Ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1:

Bestimme die Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3-\frac{3}{x^2}$

b) $f(x)=-x^2\cdot\cos(x)$

c) $f(x)=\frac{4x+1}{2x^2-x}$

d) $f(x)=\sin(3x-1)$

e) $f(x)=\frac{x}{(3x+2)^2}$

Aufgabe 2:

a) Bestimme den Parameter t so, dass sich die beiden Geraden g_1 und g_2 senkrecht schneiden.

$$g_1:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}\qquad\qquad g_2:\quad \vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\t\\3\end{pmatrix}$$

b) Gib eine Gleichung einer Ebene an, die von der Geraden g_1 im Punkt P(3|4|6) senkrecht geschnitten wird.

c) Überprüfe, ob die Gerade g_1 vollständig innerhalb der Ebene E verläuft.
$E:\quad 4x_1-4x_2+5x_3=26$

Aufgabe 3:

Gegeben sind eine Ebene E und ein Punkt P, der nicht in E liegt. P soll an der Ebene E gespiegelt werden. Beschreibe ein Verfahren, um die Koordinaten des Bildpunkts P' zu bestimmen. Fertige dazu eine Skizze an.
(Skizze und Beschreibung sollten in Bezug zueinander stehen.)

Teil 2:
Nach Abgabe von Teil 1 darfst du den Taschenrechner und die Formelsammlung als Hilfsmittel benutzen. Bei der Verwendung des GTR wird erwartet, dass du dokumentierst, wofür und wie du ihn eingesetzt hast. Eine genaue Beschreibung deiner Eingaben am GTR ist wird hingegen nicht erwartet.

Aufgabe 4)

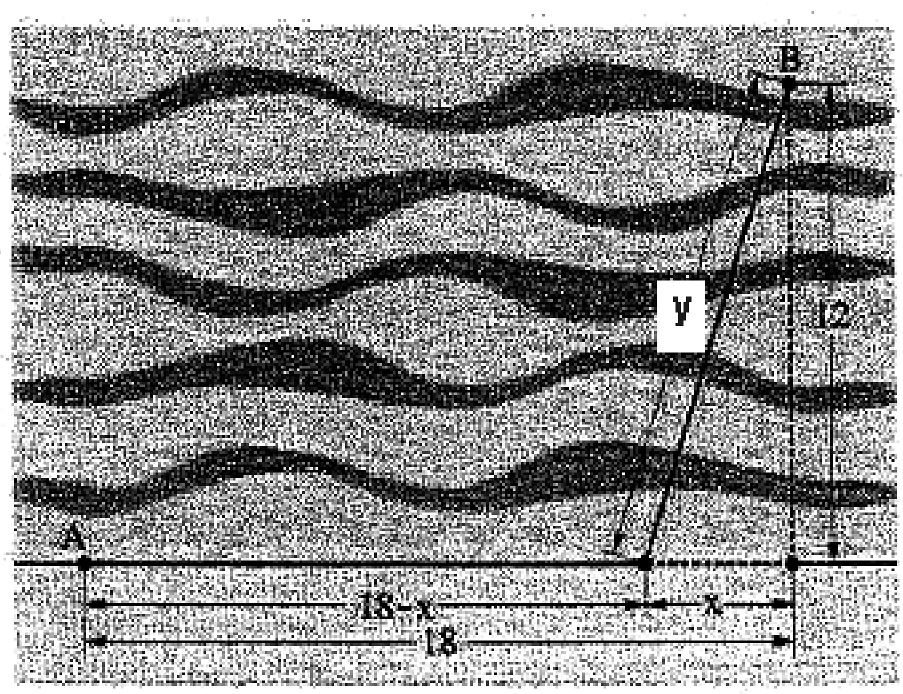
Ein Gebäude in Form einer Pyramide hat die Eckpunkte O(0|0|0|), A(6|8|0), B(0|8|0) und die Spitze S(2|4|8).

a) Zeichne die Pyramide in ein Koordinatensystem.
b) Die Seite OAS liegt in der Ebene E_{OAS}. Bestimme eine Ebenengleichung von E_{OAS}.
c) Bestimme die Schnittgerade dieser Ebene E_{OAS} mit der Ebene
$E: \quad -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 24$
d) Von der Ecke B verläuft zum Punkt P(4|6|4) ein Stahlträger. P liegt in der Ebene E_{OAS}. Untersuche, ob der Stahlträger senkrecht auf die Ebene E_{OAS} trifft.

Aufgabe 5:

Von der Anschlussstelle A an einer geradlinigen Küste soll eine Versorgungsleitung zu einer Bohrinsel B verlegt werden.
Die Bohrinsel liegt 18 km weiter östlich und ist 12 km von der Küste entfernt.
Die Verlegung an Land kostet 20 000 € pro km, die Verlegung im Meer 52 000 € pro km.

a) Stelle eine Funktion auf, die für beliebiges x mit $0 \le x \le 18$ die Streckenlänge der Versorgungsleitung angibt.
b) Wie muss das Kabel verlegt werden, damit die Kosten minimal werden?
c) Wie groß sind dann die Kosten?



!! Viel Erfolg !!

K.A.4.

Aufgabe 1

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - \frac{3}{x^2} = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 3x^{-2}$

$f'(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x^{-3}$ ✓ 1,5

b) $f(x) = -x^2 \cdot \cos(x)$

$f'(x) = -2x\cos(x) + (-x^2)\cdot(-\sin(x))$

$= -2x\cos(x) + x^2\sin(x)$ ✓ 1,5

c) $f(x) = \frac{4x+1}{2x^2-x}$

$f'(x) = \frac{4(2x^2-x) - ((4x-1)\cdot(4x+1))}{(2x^2-x)^2}$ ✓

$= \frac{8x^2-4x-(16x^2+4x-4x-1)}{(2x^2-x)^2}$

$= \; = \frac{-8x^2-4x+1}{(2x^2-x)^2}$ (✓)

$=$

2

d) $f(x) = \sin(3x-1)$

$f'(x) = \cos(3x-1)\cdot 3$

$= 3\cos(3x-1)$ ✓ 1

e) $f(x) = \frac{x}{(3x+2)^2}$

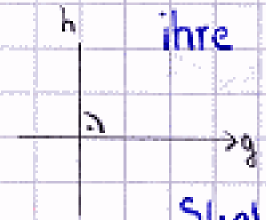
$f'(x) = \frac{(3x+2)^2 - (2(3x+2)\cdot 3\cdot(x))}{(3x+2)^4}$ ✓

$= \frac{3x+2-(6x)}{(3x+2)^3}$ ✓

$= \frac{-3x+2}{(3x+2)^3}$ (✓) 2

Aufgabe 2

a) schneiden sich die Geraden senkrecht, sind ihre Richtungsvektoren orthogonal



Skalarprodukt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

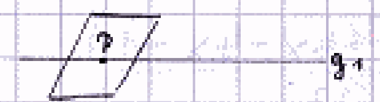
$$3 - 2t - 12 = 0 \qquad 3 - 2\left(-\frac{9}{2}\right) - 12 = 0$$

$t = -\frac{9}{2}$ damit das Skalarprodukt 0 ergibt,

2

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

b)



- Richtungsvektor der Geraden ist der Normalenvektor der Ebene
- Punkt diehnt als „Stützpunkt"

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \; \cancel{= 0} \quad f$$

falsche Darstellung

1,5

c) Einsetzen: g_1 in E (zeilenweise)

verläuft die Gerade g_1 vollständig in E, ergeben sich unendlich viele Lösungen.

6,5 / 17

$$4(3+3r) - 4(4-2r) + 5(6-4r) = 26$$

$$12 + \cancel{12r} - 16 + \cancel{8r} + 30 - \cancel{20r} = 26$$

$$26 = 26$$

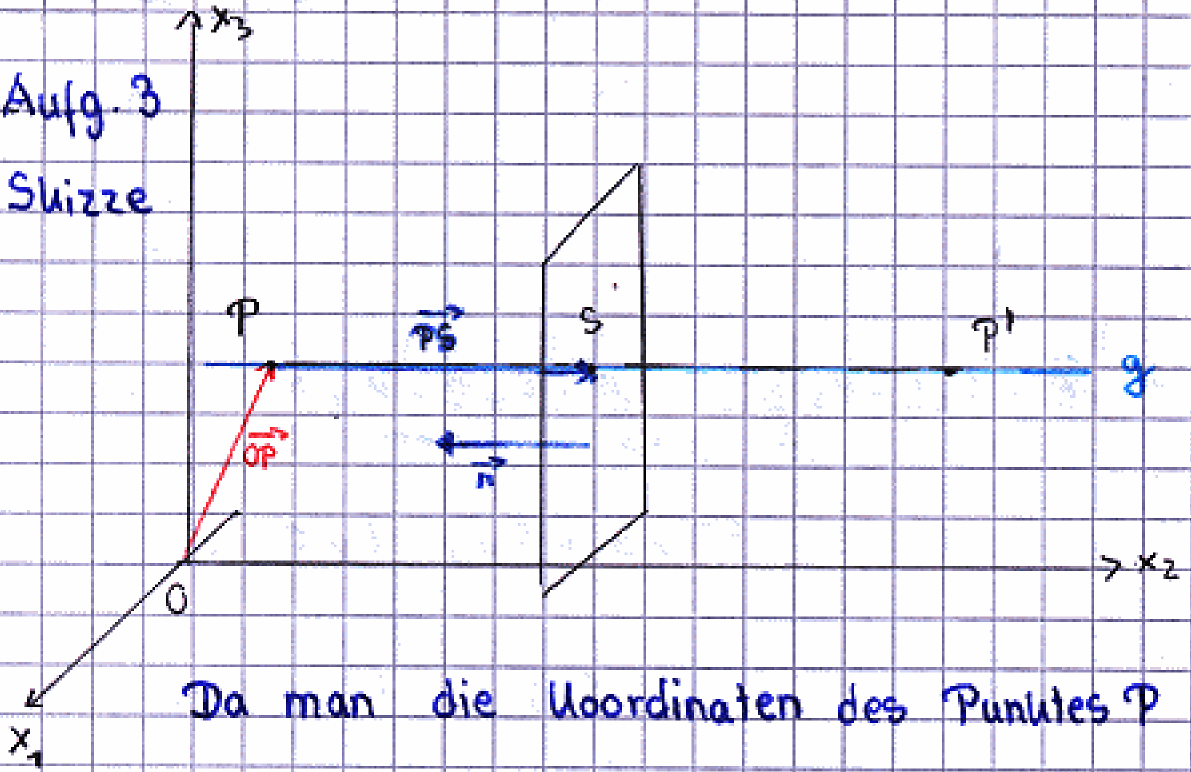
↳ unendl. viele Lsg.

3

Ja, die Gerade liegt vollständig in der Ebene

Aufg. 3

Skizze



Da man die Koordinaten des Punktes P und der Ebene kennt (nehmen wir an sie wäre in Koordinatenform angegeben), lässt sich aus dem Normalenvektor der Ebene und dem Punkt P (als Stützvektor) eine Gerade bilden.

Man untersucht nun an welchem Punkt diese Gerade die Ebene schneidet (LGS). Man erhält somit den Punkt S. Den Punkt P erhält man nun aus Aneinanderreihung der Vektoren $\overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = \overrightarrow{OP'}$

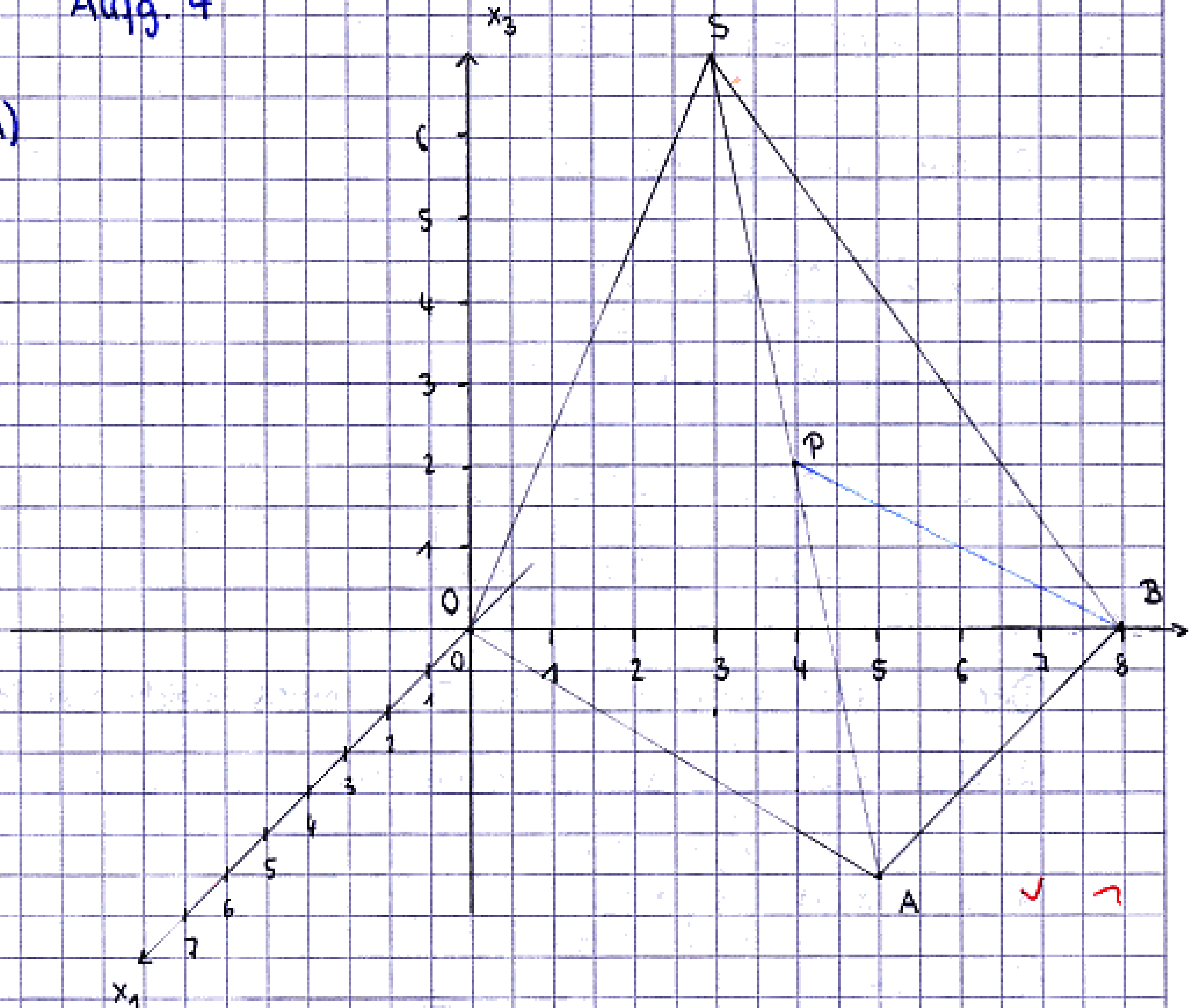
($\overrightarrow{PS}$ lässt sich aus P und S errechnen)

Damit erhält man die Koordinaten des Punktes P'.

Teil 2

Aufg. 4

a)



✓ 1

b) $O(0/0/0) \quad A(6/8/0) \quad S(2/4/8)$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix}$$ ✓ 1

c)

$$E_2: \quad -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 24$$

$$-2(6s+2t) + 3(8s+4t) + 5(8t) = 24$$ ✓

Korrigiert: $-12s - 4t + 24s + 12t + 40t = 24$ 8 R

$$12s + 48t = 24$$ (✓)

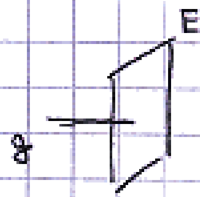
$$12s = 24 - 48t \quad |:6$$

$$s = 2 - 4t$$ (✓)

in $E_{1(OAS)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + (2-4t)\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\4\\8\end{pmatrix} \boxed{= \begin{pmatrix}12\\16\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-22\\-28\\8\end{pmatrix}}$

d) $P(4/6/4)$ $\quad$ $B(0/8/0)$

Gerade aus P und B



$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$E_{OAS}: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor von E_{OAS} muss gleich oder lin. abhäng. zum Richtungsvektor aus der Geraden $g: \vec{x}$ (aus P und B) sein.

Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \cancel{6} & \cancel{2} \\ 8 & 4 \\ 0 & 8 \\ 6 & 2 \\ 8 & 4 \\ \cancel{0} & \cancel{8} \end{array}$$

$64 - 0 = 64$
$0 - 48 = -48$
$24 - 16 = 8$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 64 \\ -48 \\ 8 \end{pmatrix}$$

lin. Abhängigkeit

$$\begin{pmatrix} 64 \\ -48 \\ 8 \end{pmatrix} \neq s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lin unabhängig}$$

Darstellung

E: Der Stahlträger trifft nicht senkrecht auf die Ebene.

Aufgabe 5

Land 20 000 € pro km

Meer 52 000 € pro km

a) $f(x) = (18 - x) + \sqrt{x^2 + 12^2}$

Streckenlänge für $0 \leq x \leq 18$ (x muss kleiner / gleich 18 gewählt werden, da ansonsten die Weglänge unterschritten wird) 2

b) Kostenfunktion

$k(x) = (18-x) \cdot 20\,000 + \left(\sqrt{x^2 + 12^2}\right) \cdot 52\,000$

GTR: Ermitteln des Tiefpunktes T des Schaubilds $k(x)$.

T (5 / 936 000)

Damit die Kosten minimal werden (936 000 €) muss die Versorgungsleitung $18 - 5 = 13$ km übers Land und $\sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ km im Meer verlegt werden.

c) Die Kosten betragen dann 936 000 €