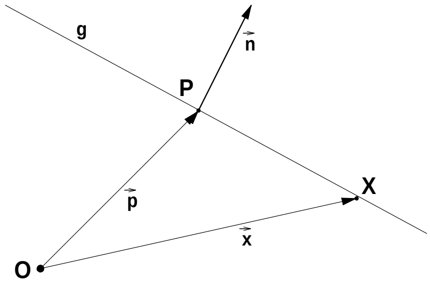
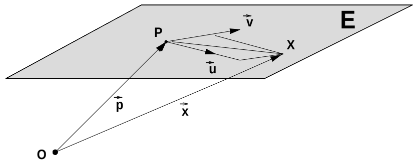
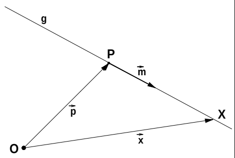
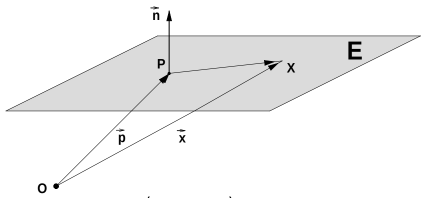
Geraden und Ebenen (1)

Darstellung von Geraden und Ebenen

Gleichung	Geraden in der Ebene	Geraden im Raum	Ebenen
vektorielle Parametergleichung	 g: $\vec{x} = \vec{p} + s\cdot\vec{u}$		 E: $\vec{x} = \vec{p} + s\cdot\vec{u} + t\cdot\vec{v}$
Normalengleichung (Koordinatengleichung) **in Koordinaten**	 g: $(\vec{x} - \vec{p})\bullet\vec{n} = 0$ g: $ax_1 + bx_2 + c = 0$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$	Eine Gerade im Raum kann **nicht** durch eine Normalengleichung dargestellt werden.	 E: $(\vec{x} - \vec{p})\bullet\vec{n} = 0$ E : $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Umwandlung der Gleichungsformen

Vektorgleichung → Normalengleichung :

Gegeben: vektorielle Parametergleichung : E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Gesucht: Normalengleichung

Bestimme den **Normalenvektor** $\vec{n}$ so, dass er senkrecht zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene ist:

$\vec{n}\bullet\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ $\quad 2n_1 + n_2 - n_3 = 0 \quad 2n_1 + n_2 - n_3 = 0 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\quad \boxed{E: x_1 - 5x_2 - 3x_3 + 12 = 0}$

$\vec{n}\bullet\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ $\quad n_1 - n_2 + 2n_3 = 0 \quad 3n_2 - 5n_3 = 0$

2. Weg: Eliminiere s und t aus der Vektorgleichung

Normalengleichung → Vektorgleichung :

Gegeben: Normalengleichung : E : $x_1 + 2x_2 - x_3 + 5 = 0$ **Gesucht:** Vektorgleichung

1.) Bestimme einen Punkt P der Ebene : z.B. P(0|0|5)

2.) Bestimme zwei l.u. Richtungsvektoren, die senkrecht zu $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sind : z.B. : , $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

also: E : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Geraden und Ebenen (2)

Schnittprobleme:

1. Gerade – Gerade:

$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned} 2 + s &= 1 + t \qquad & t &= 2 \\ 1 - s &= -2 + t \qquad & s &= 1 \\ 1 + 2s &= 1 + t \qquad & \text{Probe in } (3)&: 1 + 2 = 2 + 1 \end{aligned}$$

$\boxed{S(3|0|3)}$

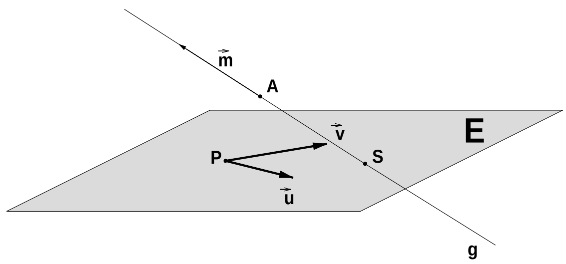
2. Gerade – Ebene:

a) <u>beide Gleichungen in Vektorform:</u>

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{lll} s = 2 - k - l & s = 2 - k - l & l = -3 \\ 1 + s = 1 \quad + l & s = \quad\quad l & s = -3 \\ 2 - s = 3 + k + 2l & -3 = \quad\quad l & k = 8 \end{array}$$

$\boxed{S(-3|-2|5)}$



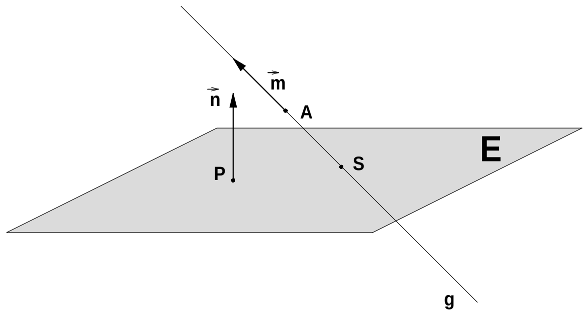
b) <u>Ebenen-Gleichung in Normalenform:</u>

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $E : 2x_1 + x_2 - x_3 + 9 = 0$

Setze in der Ebenengleichung die Koordinaten aus der Geradengleichung ein:

$2s + (1+s) - (2-s) + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = -2$,

also: $\boxed{S(-2|-1|4)}$



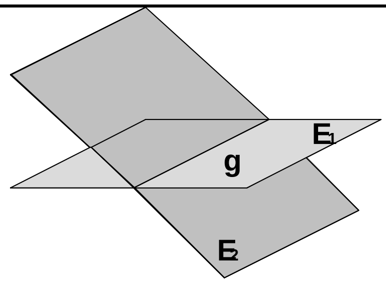
3. Ebene – Ebene :

a) <u>beide Gleichungen in Vektorform :</u>

$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} 1 + 2r &= k + 3l \\ 3r + s &= 4k + 4l \\ 2 - r - 2s &= 2 - 3k - l \end{aligned}$$

Eliminiere 2 Variable, z.B. r und s; es bleibt: <u>**l = 5k + 5**</u>
Setze das Ergebnis in der Gleichung von E_2 ein und fasse zusammen.
Man erhält die Gleichung von g.



$\boxed{g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ -3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ 24 \\ -8 \end{pmatrix}}$

b) <u>eine Vektorgleichung – eine Normalengleichung:</u>

$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $E_2 : 2x_1 + x_2 + x_3 - 3 = 0$

Setze die 3 Koordinaten aus der Vektorgleichung in der Normalenglei-chung ein :

<u>Ergebnis:</u> $(2+4r) + (3r+s) + (2-r-2s) - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad s = 6r + 1$

$\boxed{g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}}$

c) <u>beide Gleichungen in Normalenform:</u>

$$\begin{array}{lll} E_1 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 & 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 & x_1 = 1 + 2s \\ E_2 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 & -x_2 + 5x_3 = 3 & x_2 = -3 + 5s \\ & & x_3 = \quad s \end{array}$$

$\boxed{g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}}$

Geraden und Ebenen (3)

Das Teilverhältnis:

Definition:
Das Teilverhältnis eines Punkte T bzgl. zweier Punkte A und B ist die Zahl $t \in \mathbb{R}$,
für die gilt : $\overrightarrow{AT} = t \cdot \overrightarrow{TB}$, TV(A,T,B) = t

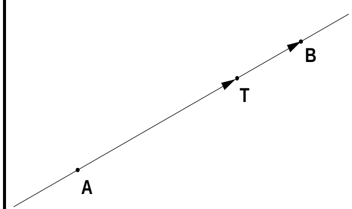
Bemerkung: Zusammenhang zwischen dem Teilverhältnis t ($\overrightarrow{AT} = t \cdot \overrightarrow{TB}$) und dem Parameter r ($\overrightarrow{AT} = r \cdot \overrightarrow{AB}$) :

$$r = \frac{t}{1+t} \quad \text{bzw.} \quad t = \frac{r}{1-r}$$

Beispiele :

1.) $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{TB}$ (d.h. TV(A,T,B)= 3:4) $\Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{3}{7} \cdot \overrightarrow{AB}$

2.) $\overrightarrow{AT} = \frac{3}{5} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{TB} = \frac{2}{5} \cdot \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AT} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{TB}$ (d.h. TV(A,T,B) = 3:2)



Abstandsprobleme:

1. Abstand zweier Punkte: $P(p_1|p_2|p_3)$, $Q(q_1|q_2|q_3)$

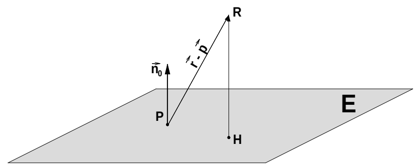
$$\boxed{d(P,Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}}$$

2. Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$E: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \bullet \vec{n}_0 = 0 \;\; (HNF \;\; von \;\; E)$ und Punkt $R\left(\vec{r}\right)$

Setze den Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes R in der HNF für $\vec{x}$ ein :

$$\boxed{d(R,E) = \left| \left(\vec{r} - \vec{p}\right) \bullet \vec{n}_0 \right|}$$



3. Abstand eines Punktes von einer Geraden:

1. Weg:
Bestimme die Gleichung der Ebene E, die senkrecht zu g ist und die den Punkt P enthält.
Berechne den Schnittpunkt H von g und E.
Berechne den Abstand der Punkte P und H.

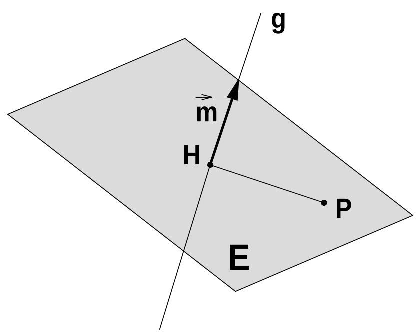
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, P(2|-3|1) :

$$E: x_1 + 2x_2 + x_3 + 3 = 0$$
$$E \cap g: 1 + s + 2 + 4s + s + 3 = 0$$
$$s = -1, also: H(0|-1|-1)$$

2. Weg:

Wähle H beliebig auf g : H(1+s|1+2s|s) , $\overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} -1+s \\ 4+2s \\ -1+s \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PH} \bullet \vec{m} = 0 \Rightarrow$ (-1+s) + 2(4+2s) + (-1+s) = 0 $\Rightarrow$ s = -1 $\Rightarrow$ $\boxed{H(0|-1|-1)}$



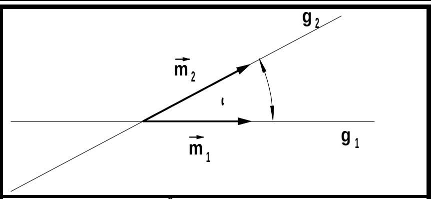
$$\boxed{d(P,g) = \left|\overrightarrow{PH}\right| = 2 \cdot \sqrt{3}}$$

Geraden und Ebenen (4)

Schnittwinkel:

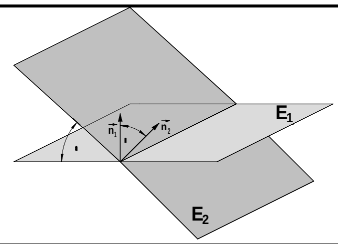
1.) Winkel zwischen 2 Geraden:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{m_1} \bullet \vec{m_2}}{|\vec{m_1}| \cdot |\vec{m_2}|} \right| \quad , \ \vec{m_1}, \vec{m_2} \text{ sind die Richtungsvektoren der Geraden}$$



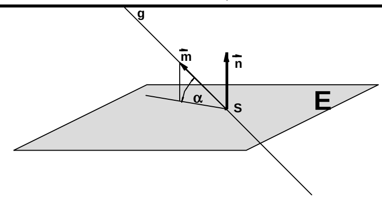
2.) Winkel zwischen 2 Ebenen:

$$\cos(\alpha) = \left| \frac{\vec{n_1} \bullet \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|} \right| \quad , \ \vec{n_1}, \vec{n_2} \text{ sind die Normalenvektoren der Ebenen}$$



3.) Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$\sin(\alpha) = \left| \frac{\vec{m} \bullet \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} \right| \quad , \ \begin{array}{l} \vec{m} \ \textit{Richtungsvektor von } g \\ \vec{n} \ \textit{Normalenvektor von } E \end{array}$$



Spiegelung eines Punktes

1.) an einer Ebene:

Berechne den Schnittpunkt H der Lotgeraden l zu E durch P :

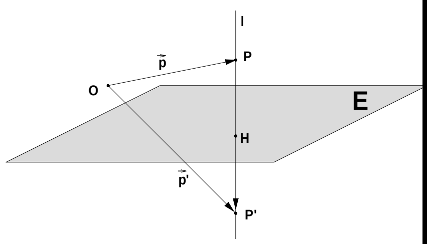
Dann gilt: $\boxed{\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PH}}$

E : $2x_1 + x_2 - x_3 - 4 = 0$, Punkt P(5|3|-3)

Lotgerade l : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$l \cap E: \quad (10+4s)+(3+s)+(3+s)-4=0 \quad s=-2$$

Lotfußpunkt: **H(1|1|-1)** $\vec{p'} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, **P‘(-3|-1|1)**



2.) an einer Geraden:

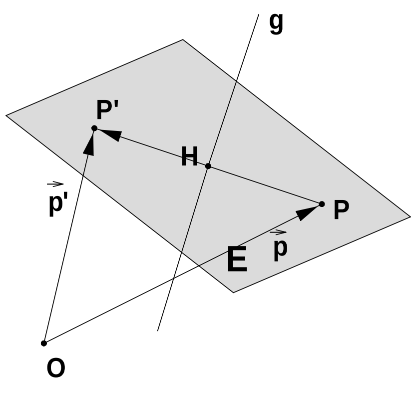
Berechne den Lotfußpunkt H des Lotes von P auf die Gerade g (siehe Abstandsprobleme Nr.3 Abstand Punkt – Gerade)

Es gilt dann : $\boxed{\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PH}}$

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, Punkt P(5|3|1) ,

$$E: x_1 - x_2 + x_3 - 3 = 0$$
$$E \cap g: \quad (1+s)-(2-s)+(1+s)-3=0 \quad s=1$$

Lotfußpunkt: **H(2|1|2)** , $\vec{p'} = \vec{p} + 2 \cdot \overrightarrow{PH} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, **P‘(-1|-1|3)**



Ableitung und Integration

Ableitungsregeln:

1.) Produktregel: f(x) = u(x)·v(x)

$$\boxed{f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)}$$

Beispiele:

1.) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

$f'(x) = 2x\cdot e^x + x^2\cdot e^x$

2.) $f(x) = \sin(x)\cdot\cos(x)$

$f'(x) = \cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot(-\sin(x))$

2.) Quotientenregel: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v(x)^2}}$$

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x+1) - (x^2-1)\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

3. Kettenregel: $f(x) = (g\circ v)(x) = g(v(x))$

$$\boxed{f'(x) = g'(v(x))\cdot v'(x)}$$

Spezialfall: f(x) = g(ax+c)

v(x) = ax+c (innere Funktion ist linear)

$$\boxed{f'(x) = a\cdot g'(ax+c)}$$

Beispiele:

1.) $f(x) = (2x^2-1)^3$

$f'(x) = 3\cdot(2x^2-1)^2\cdot 2x = 6x\cdot(2x^2-1)^2$

2.) $f(x) = e^{-x^2}$

$f'(x) = -2x\cdot e^{-x^2}$

3.) $f(x) = \ln(x^2+1)$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+1}$

Beispiele:

1.) $f(x) = \frac{3}{(2x+1)^2}$

$f'(x) = -\frac{12}{(2x+1)^3}$

2.) $f(x) = e^{-0,5x+1}$

$f'(x) = -0,5\cdot e^{-0,5x+1}$

3.) $f(x) = \ln(3x-1)$

$f'(x) = \frac{1}{3x-1}\cdot 3 = \frac{3}{3x-1}$

Integration durch lineare Substitution:

Umkehrung des Spezialfalles der Kettenregel:

f(x) = g(ax+c) (d.h. die innere Funktion ist eine lineare Funktion)

Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{a}\cdot G(ax+c)$ (wobei G eine Stammfunktion der äußeren Funktion g ist

Beispiele:

1.) $f(x) = (2x+1)^2$; $F(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{3}\cdot(2x+1)^4 = \frac{1}{6}\cdot(2x+1)^4$

2.) $f(x) = \frac{1}{(0,5x+1)^2}$; $F(x) = -2\cdot\frac{1}{0,5x+1}$

3.) $f(x) = \frac{1}{3x-1}$; $F(x) = \frac{1}{3}\cdot\ln(|3x-1|)$

4.) $f(x) = e^{-3x-4}$; $F(x) = -\frac{1}{3}\cdot e^{-3x-4}$

Integralfunktionen:

Definition: Ist f : x $\rightarrow$ f(x) , x $\in$ [c;d] eine stetige Funktion und a eine Zahl aus dem Intervall [c;d], so heißt die Funktion F_a mit

$$\boxed{F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

Integralfunktion von f zur Stelle a .

Bemerkung: Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion zur Randfunktion f und zwar die, für die gilt : $F_a(a) = 0$

also: $F_a'(x) = f(x)$

Stetigkeit - Differenzierbarkeit

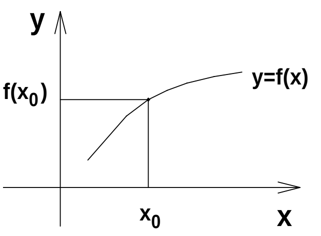
1.) Stetigkeit:

Definition: Eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$, $x \in \mathbb{D}_f$ heißt an einer Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge **stetig** , wenn gilt : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ (Grenzwert = Funktionswert)

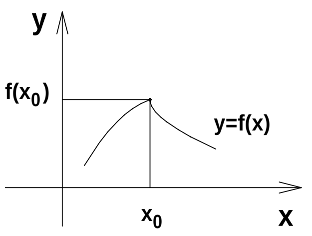
Bemerkung: Bei abschnittsweise definierten Funktionen zeigt man die Stetigkeit an einer Nahtstelle x_0 dadurch, dass man beweist : der linksseitige Grenzwert ist gleich dem rechtsseitigen Grenzwert und dieser ist gleich dem Funktionswert.

Beispiele:

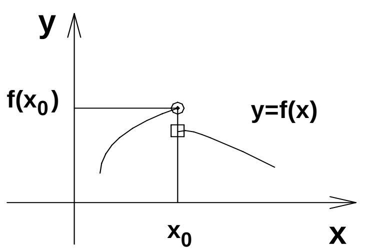
f ist stetig an der Stelle x_0



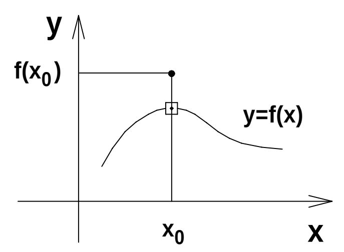
f ist stetig an der Stelle x_0



f ist nicht stetig an der Stelle x_0



f ist nicht stetig an der Stelle x_0



Beispiel:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 = f_1(x) & ; x \geq 1 \\ \dfrac{3}{x} = f_2(x) & ; 0 < x < 1 \end{cases}$$

f ist stetig an der Nahtstelle $x_0 = 1$

rechtsseitiger Grenzwert : $\lim\limits_{x \to 1} f_1(x) = 3$

linksseitiger Grenzwert: $\lim\limits_{x \to 1} f_2(x) = 3$

Funktionswert: $f(1) = 3$

also: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = 3$

2.) Differenzierbarkeit:

Definition: Eine Funktion $f : x \rightarrow f(x)$, $x \in \mathbb{D}_f$ heißt an einer Stelle x_0 ihrer Definitionsmenge **differenzierbar**, wenn gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ \textit{existiert, bzw.} \ \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \ \textit{existiert}$$

dann gilt: $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$ bzw. $\boxed{f'(x_0) = \lim\limits_{h \to o} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}}$

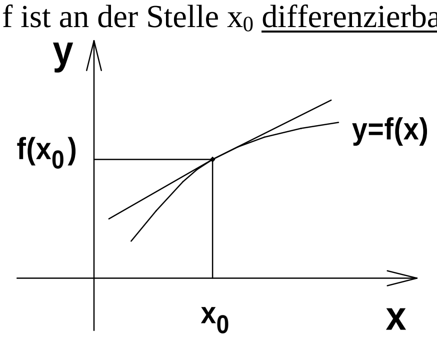
Bemerkung: $f'(x_0)$ ist der **Grenzwert des Differenzenquotienten**; das bedeutet geometrisch: $f'(x_0)$ ist der **Grenzwert der Sekantensteigungen**.

Satz: Wenn f differenzierbar ist, dann ist f stetig.

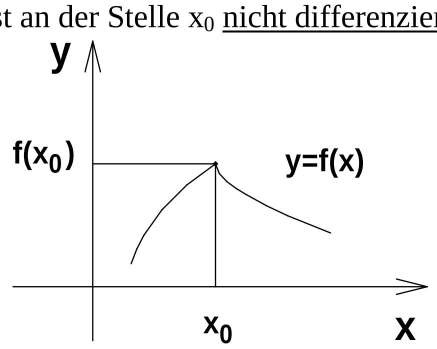
aber umgekehrt: Eine stetige Funktion muss nicht differenzierbar sein.

Beispiele:

f ist an der Stelle x_0 differenzierbar



f ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar



Beispiel: $$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 = f_1(x) & ; x \geq 1 \\ \dfrac{3}{x} = f_2(x) & ; 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

f ist an der Nahtstelle $x_0 = 1$ nicht differenzierbar

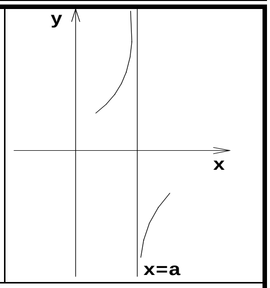
rechtsseitige Ableitung: $f_1'(1) = -2$

linksseitige Ableitung: $f_2'(1) = -3$

also: $f'(1)$ existiert nicht.

Asymptoten

1.) senkrechte Asymptoten an den Definitionslücken:



Gegeben: $f: x \to f(x)$ mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, $D_f = \{x \mid v(x) \neq 0\}$

Lücke x=a: Untersuche das Verhalten von f(x) für $x \xrightarrow[x<a]{} a$ und für $x \xrightarrow[x>a]{} a$.

f hat einen **Pol** an der Stelle x = a und das Schaubild von f hat eine **senkrechte Asymptote** x = a ,wenn gilt :

$$\boxed{|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} \infty}$$

An einer Definitionslücke x=a , d.h. einer Nullstelle des Nenners, sind 2 Fälle möglich:

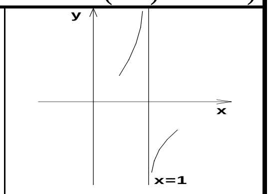
Fall 1: v(a) = 0, aber u(a) ≠ 0 ⇒ f hat an der Stelle x = a einen Pol, das Schaubild eine senkrechte Asymptote

Fall 2: v(a) = 0 und u(a) = 0 ⇒ $\begin{cases} f \text{ hat eine hebbare Lücke, wenn } \lim\limits_{x \to a} f(x) \text{ existiert} \\ f \text{ hat einen Pol, wenn } |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} \infty \end{cases}$

(Bemerkung: bei gebrochen-rationalen Funktionen kann man bei Fall 2) mit dem Linearfaktor (x-a) kürzen)

Beispiel 1: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$; Lücke x = 1 : u(1) = -3 ≠ 0 (Fall 1.)

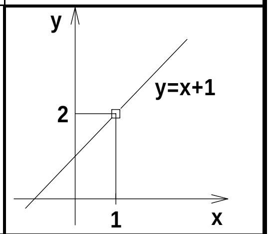
$f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow[x>1]{} 1]{} -\infty$, $f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow[x<1]{} 1]{} +\infty$; **Asymptote :** $\boxed{x = 1}$



Beispiel 2: $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$; Lücke x = 1 : u(1) = 0 (Fall 2.)

kürzen : $f(x) = \frac{(x-1)\cdot(x+1)}{x-1} = x+1$; also: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

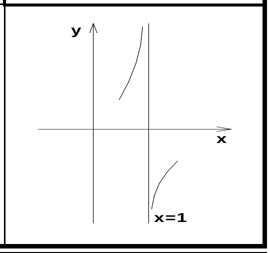
also: **f hat eine hebbare Lücke x=1**



Beispiel 3: $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2}$; Lücke x = 1 : u(1) = 0 (Fall 2.)

kürzen: $f(x) = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$;

$f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow[x>1]{} 1]{} +\infty$; $f(x) \xrightarrow[x \xrightarrow[x<1]{} 1]{} -\infty$; **Asymptote :** $\boxed{x = 1}$



2.) waagerechte/schiefe Asymptoten für x → ±∞:

Definition: Eine Funktion g heißt Asymptotenfunktion zur Funktion f für x → ±∞ , wenn gilt :

$$\boxed{\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 0}$$

Das Schaubild der Asymptotenfunktion g mit der Gleichung y = g(x) heißt Asymptote.

Bemerkung: Bei gebrochen-rationalen Funktionen f mit $f(x) = \frac{a_n x^n + \ldots + a_0}{b_m x^m + \ldots + b_0}$ gilt :

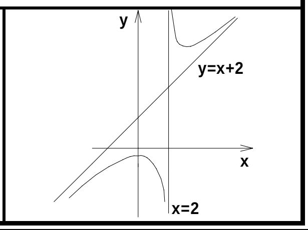
Zählergrad < Nennergrad : **Asymptote** y = 0 (x-Achse)

Zählergrad = Nennergrad : **Asymptote** $y = \frac{a_n}{b_n}$ (Parallele zur x-Achse)

Zählergrad > Nennergrad : führe die Polynomdivision solange durch, bis der Rest r(x) eine Funktion mit Zählergrad < Nennergrad ist.
Man erhält : f(x) = g(x) + r(x) ; **Asymptote :** y = g(x)

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2} = (x+2) + \frac{5}{x-2}$, **Asymptote :** $\boxed{y = x + 2}$

$= g(x) + r(x)$



Extrempunkte - Wendepunkte

1. Extrempunkte (Hoch- und Tiefpunkte):

Die notwendige Bedingung für Extrempunkte:

Wenn f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum hat, dann muss $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ sein

Bemerkung: Die Bedingung ist nicht hinreichend:
Wenn $f'(x_0) = 0$ ist, dann muss f nicht unbedingt an der Stelle x_0 ein Extremum haben, f kann z.B. auch eine Wendestelle mit waagerechter Tangente haben:
z.B. $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, aber: f hat eine Wendestelle $x_0 = 0$.

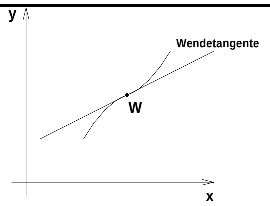
Die 1. hinreichende Bedingung für eine Extremstelle:

Wenn $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ ist und wenn $\mathbf{f''(x_0) \neq 0}$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum
Ist $\mathbf{f''(x_0) > 0}$, so hat f ein **lokales Minimum**, das Schaubild also einen **Tiefpunkt**.
Ist $\mathbf{f''(x_0) < 0}$, so hat f ein **lokales Maximum**, das Schaubild also einen **Hochpunkt**.

Die 2. hinreichende Bedingung für eine Extremstelle:
Wenn $\mathbf{f'(x_0) = 0}$ ist und wenn f´ an der Stelle x_0 sein **Vorzeichen wechselt**, dann hat f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.
Vorzeichenwechsel von - nach + : f hat lokales Minimum, das Schaubild einen Tiefpunkt.
Vorzeichenwechsel von + nach - : f hat lokales Maximum, das Schaubild einen Hochpunkt.

2. Wendepunkte:

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte:
Wenn f an der Stelle x_0 eine Wendestelle hat, dann muss $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ sein.



Bemerkung: Die Bedingung ist nicht hinreichend:
Wenn $f''(x_0) = 0$ ist , so braucht f an der Stelle x_0 keine Wendestelle zu haben : z.B. $f(x) = x^4$: $f''(0) = 0$, aber: f hat ein Minimum bei $x_0=0$

Die 1. hinreichende Bedingung für eine Wendestelle:

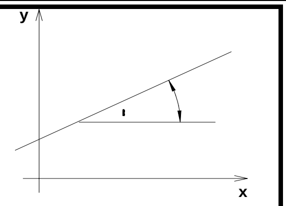
Wenn $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ ist und wenn $\mathbf{f'''(x_0) \neq 0}$ ist, dann hat f an der Stelle x_0 eine Wendestelle.
$f'''(x_0) > 0$: Übergang von einer Rechtskurve in eine Linkskurve.
$f'''(x_0) < 0$: Übergang von einer Linkskurve in eine Rechtskurve

Die 2. hinreichende Bedingung für eine Wendestelle:

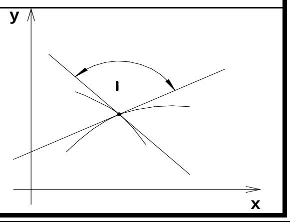
Wenn $\mathbf{f''(x_0) = 0}$ ist und wenn **f´´** an der Stelle x_0 sein **Vorzeichen wechselt**, dann hat f an der Stelle x_0 eine Wendestelle.
Vorzeichenwechsel von - nach + : Übergang von einer Rechtskurve in eine Linkskurve
Vorzeichenwechsel von + nach - : Übergang von einer Linkskurve in eine Rechtskurve

Winkel zwischen 2 Kurven

Definition 1: Der Steigungswinkel α einer Geraden ist der Winkel zwischen der positiven x-Richtung und der Geraden.
Es gilt : $\boxed{\tan \alpha = m}$



Definition 2: Der Schnittwinkel zwischen 2 Kurven ist der Winkel zwischen den Tangenten im Schnittpunkt.
Es gilt: $\boldsymbol{\delta = \alpha_2 - \alpha_1}$, wobei : $\tan \alpha_1 = m_1 = f'(x_0)$,
$\tan \alpha_2 = m_2 = g'(x_0)$



Spezialfälle: (1) **rechtwinklig schneiden :** $\mathbf{f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1}$
(2) **berühren:** 1.) $\mathbf{f(x_0) = g(x_0)}$ (gemeinsamer Punkt)
2.) $\mathbf{f'(x_0) = g'(x_0)}$ (gleiche Steigung)

Ortskurven

Ortskurve von Punkten, deren Koordinaten von einem Parameter abhängen:

Punkte $P(x(t)|y(t))$: Löse die Gleichung $x = x(t)$ nach t auf und setze das Ergebnis in der Gleichung $y = y(t)$ ein. Man erhält eine Gleichung $y = y(x)$, die Gleichung der Ortskurve.

Beispiel: $P\left(t-2\,|\,\frac{1}{t^2}\right)$, $t > 0$: also: $\left.\begin{array}{l} x=t-2 \Rightarrow t=x+2 \\ y=\frac{1}{t^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{(x+2)^2}\ ;\ x>-2}$

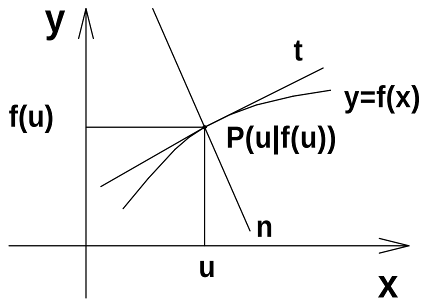
Tangenten und Normalen

1.) Tangentengleichung in einem Punkt P(u|f(u)):

$\boxed{\mathbf{t:\ y - f(u) = f'(u)\cdot(x-u)}}$

2. Normalengleichung in einem Punkt P(u|f(u)):

$\boxed{\mathbf{n:\ y - f(u) = -\frac{1}{f'(u)}\cdot(x-u)}}$



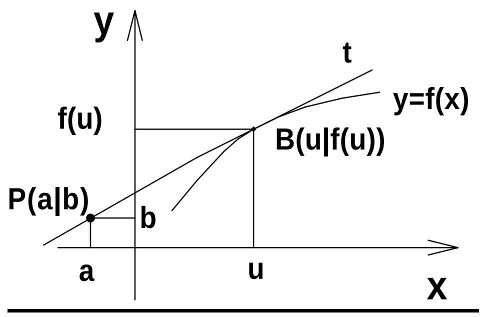
3. Tangenten von einem Punkt P(a|b) an eine Kurve:

Bestimmung des Berührpunktes B(u|f(u)):

Ansatz: (1) Tangente in B(u|f(u)) : t : $y - f(u) = f'(u)\cdot(x-u)$
(2) $P(a|b) \in t$: $b - f(u) = f'(u)\cdot(a-u)$
(3) Löse die Gleichung in (2) nach u auf !

Beispiel: $f(x) = x^2 + 2$, Tangente von P(1|2) aus an die Kurve
(1) t : $y - (u^2 + 2) = 2u\cdot(x-u)$
(2) $P \in t$: $2 - (u^2 + 2) = 2u\cdot(1-u)$
(3) $u^2 - 2u = 0$

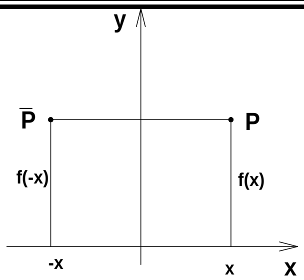
$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{u_1 = 0\ ,\ B_1(0|2)} \\ \mathbf{u_2 = 2\ ,\ B_1(2|6)} \end{array}}$



Symmetrie

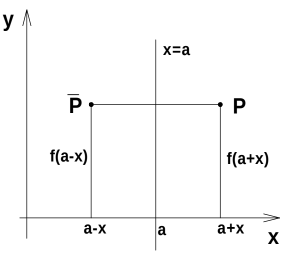
1. Achsensymmetrie zur y-Achse:

$\boxed{\mathbf{f(-x) = f(x)}}$



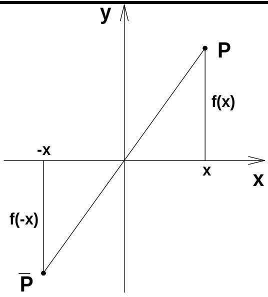
2. Achsensymmetrie zu einer Achse x=a:

$\boxed{\mathbf{f(a-x) = f(a+x)}}$



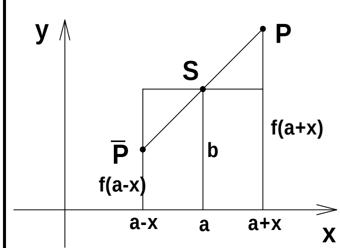
3. Punktsymmetrie zum Ursprung:

$\boxed{\mathbf{f(-x) = -f(x)}}$



4. Punktsymmetrie zu einem Punkt S(a|b)

$\boxed{\begin{array}{l} \mathbf{b - f(a-x) = f(a+x) - b} \\ \text{bzw. :} \\ \mathbf{f(a+x) + f(a-x) = 2b} \end{array}}$

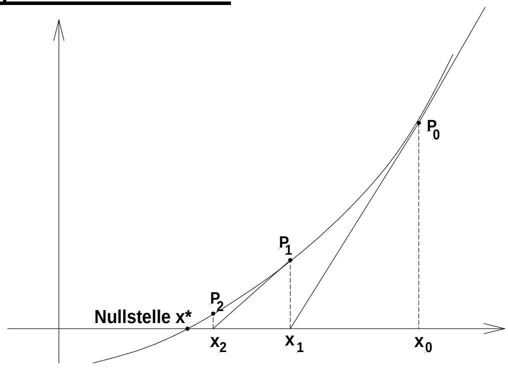


Näherungsverfahren in der Mathematik

Nullstellensatz für stetige Funktionen:
Wenn f in einem Intervall [a;b] stetig ist und wenn f(a)<0 und f(b)>0 ist (bzw. f(a)>0 und f(b)<0), dann hat f im Intervall [a;b] wenigstens eine Nullstelle x^* (d.h. $f(x^*)=0$) .

1.) Das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung einer Nullstelle:

Idee des Newtonverfahrens:
Wenn f an einer Stelle x* eine Nullstelle hat (d.h. f(x*) = 0), so kann man die Nullstelle x* durch folgendes Verfahren immer besser annähern:



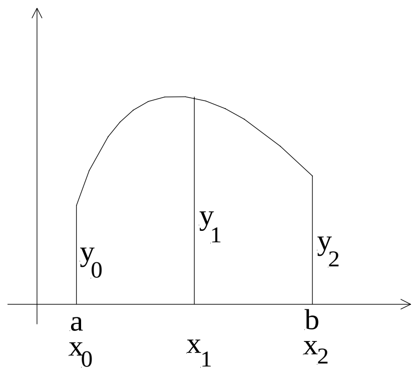
- man wählt eine Anfangsnäherung x_0 und damit den Näherungspunkt $P_0(x_0|f(x_0))$ auf dem Schaubild in der Nähe der Nullstelle
- man nimmt die Tangente in diesem Punkt P_0 und berechnet den Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse (Stelle x_1)
- man nimmt x_1 als neue Näherung und wiederholt mit dem Punkt $P_1(x_1|f(x_1))$ das Verfahren
- auf diese Weise erhält man eine Folge von Näherungswerten x_0 , x_1 , x_2 , ... , x_n,...
  Die Folgenglieder erhält man durch die **Rekursionsvorschrift :**
  Anfangsnäherung x_0 ; $\quad x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ **(Newton-Verfahren)**
- die Folge (x_n) konvergiert in der Regel sehr schnell gegen die gesuchte Nullstelle x*.

2.) Die keplersche Fassregel zur näherungsweisen Bestimmung von Integralen:

Ein Integral $\int_a^b f(x)dx$ kann folgendermaßen näherungsweise berechnet werden:
Man teilt das Intervall [a ; b] in 2 gleich lange Teile mit den Teilpunkten x_0 , x_1 , x_2 und berechnet die Funktionswerte $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ an diesen Teilpunkten.
Beachte: die keplersche Fassregel kann sowohl für die näherungsweise Berechnung von Flächeninhalten als auch von Rauminhalten verwendet werden:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot [y_0 + 4y_1 + y_2]}$$

$$\boxed{\pi\int_a^b f(x)^2\,dx \approx \pi \cdot \frac{b-a}{6} \cdot [y_0{}^2 + 4\,y_1{}^2 + y_2{}^2]}$$

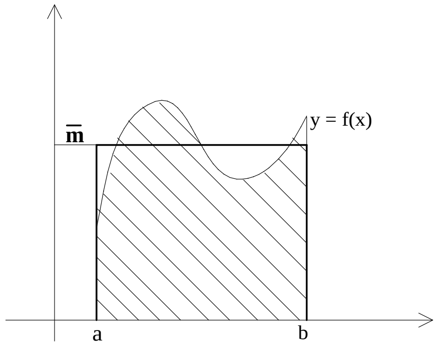


3.) Mittelwert einer Funktion mit Hilfe des Integrals:

Als Mittelwert für die Funktionswerte einer Funktion f über einem Intervall [a;b] bezeichnet man die Zahl :

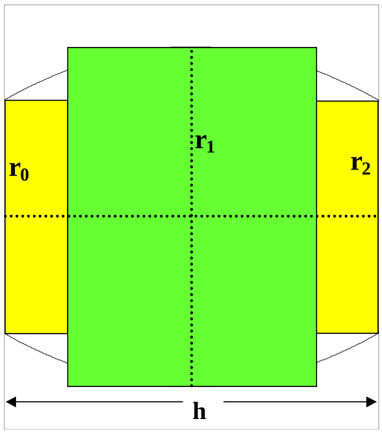
$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

Bemerkung: $\int_a^b f(x)dx = \overline{m} \cdot (b-a)$, d.h. das Integral ist gleich dem Flächeninhalt eines Rechtecks über dem Intervall [a;b] mit der Höhe $\overline{m}$. In diesem Sinn ist $\overline{m}$ als mittlerer Funktionswert zu verstehen.



Die keplersche Fassregel zur näherungsweisen Bestimmung von Integralen

Das **Volumen eines Fasses** mit der Höhe **h** berechnet sich näherungsweise aus den Radien des Bodens $\mathbf{r_0}$,des Deckels $\mathbf{r_2}$ und des größten Radius $\mathbf{r_1}$:

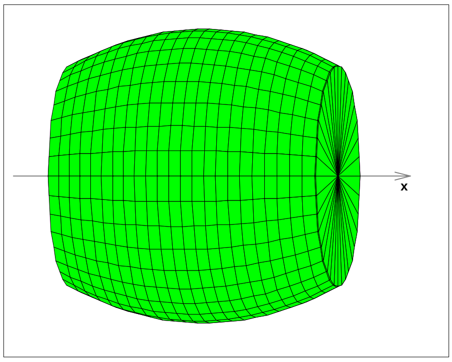


$$\mathbf{V \approx \left(\pi \cdot r_0^{\,2} \cdot \frac{1}{6} h\right) + 4 \cdot \left(\pi \cdot r_1^{\,2} \cdot \frac{1}{6} h\right) + \left(\pi \cdot r_2^{\,2} \cdot \frac{1}{6} h\right)}$$

Zylinder 1 **Zylinder 2** **Zylinder 3**

$$\boxed{V \approx \pi \cdot \frac{h}{6} \cdot \left[r_0^{\,2} + 4 r_1^{\,2} + r_2^{\,2}\right]}$$

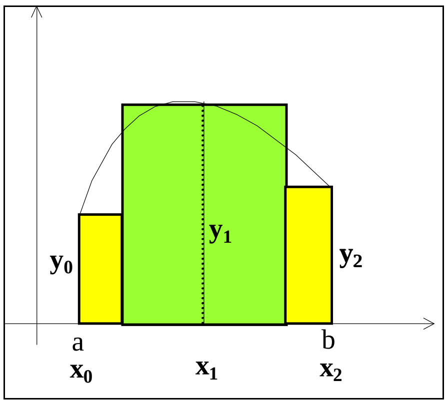
Kann man die Krümmungslinie mithilfe des Schaubildes einer Funktion f : y = f(x) über dem Intervall [a ; b] beschreiben, dann ist



$\mathbf{r_0 = f(x_0) = y_0}$, $\mathbf{r_1 = f(x_1) = y_1}$, $\mathbf{r_2 = f(x_2) = y_2}$ und
$\mathbf{h = b - a}$ und für
$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ (Volumen des Rotationskörpers)
ergibt sich als Näherungswert:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \approx \pi \cdot \frac{b-a}{6} \cdot \left[y_0^{\,2} + 4 y_1^{\,2} + y_2^{\,2}\right]}$$

Der **Flächeninhalt (** $\int_a^b f(x)dx$ **)** der Fläche zwischen dem Schaubild von f : y = f(x) und der x-Achse über dem Intervall [a ; b] kann entsprechend folgendermaßen näherungsweise berechnet werden:



Man teilt das Intervall [a ; b] in 2 gleich lange Teile mit den Teilpunkten $x_0 = a$, $x_1 = \frac{b - a}{2}$, $x_2 = b$ und berechnet die Funktionswerte
$\mathbf{y_0 = f(x_0)}$, $\mathbf{y_1 = f(x_1)}$, $\mathbf{y_2 = f(x_2)}$ an diesen Teilpunkten. Für das $\int_a^b f(x)dx$ ergibt sich als Näherungswert:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \cdot [y_0 + 4 y_1 + y_2]}$$

Die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus

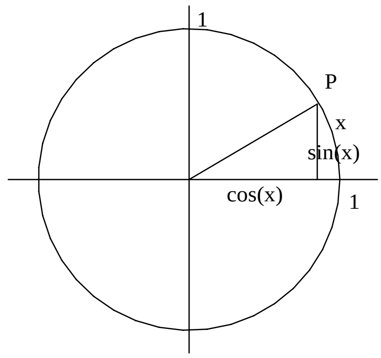
Das Bogenmaß eines Winkels:
Das **Bogenmaß eines Winkels** ist die zu dem Winkel gehörende **Länge des Bogens auf dem Einheitskreis.**

Gradmaß α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Bogenmaß x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

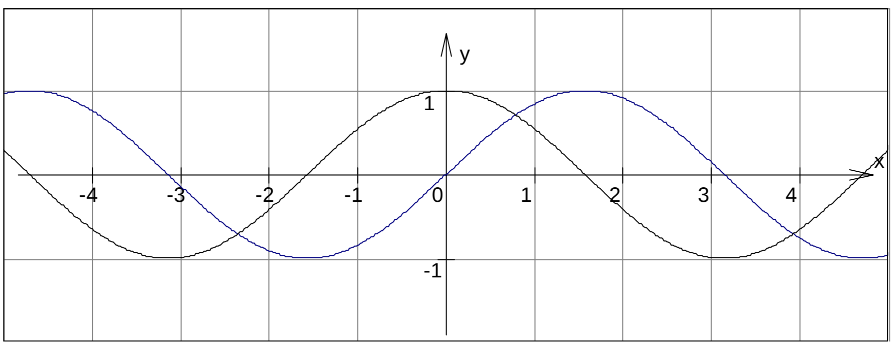
Definition von Sinus und Cosinus:

sin x ist die **2. Koordinate** des zum Winkel x gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis .

cos x ist die **1. Koordinate** des zum Winkel x gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis .



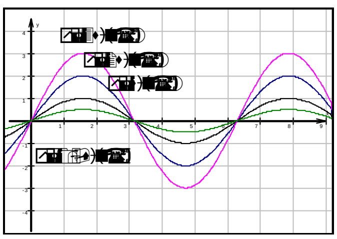
Funktion:	Def.-Menge	Ableitung:	Stammfunktion:	Periode:
1.) f(x) = sin x	x ∈ □	f'(x) = cos x	F(x) = - cos x + c	2π
2.) f(x) = cos x	x ∈ □	f'(x) = - sin x	F(x) = sin x + c	2π



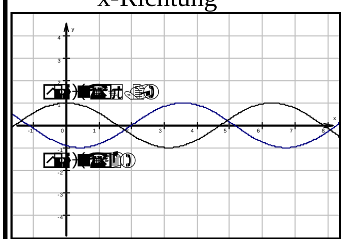
Streckungen/Verschiebungen der sin-Kurve (cos-Kurve) :

1. Streckung in y-Richtung mit Faktor a: **f(x) = a·sin(x)** Amplitude: |a|
2. Verschiebung in x-Richtung um c: **f(x) = sin(x-c)**
3. Verschiebung in y-Richtung um d: **f(x) = sin(x) +d**
4. allgemein: **f(x) = a·sin(x-c) + d**

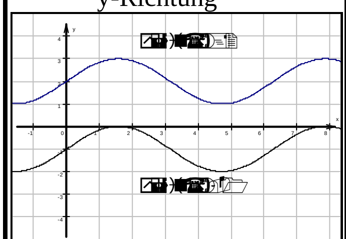
1. Streckung in y-Richtung



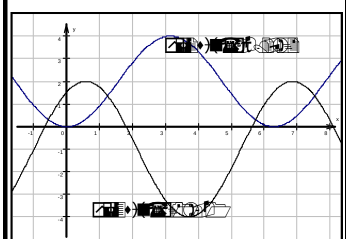
2. Verschiebung in x-Richtung



3. Verschiebung in y-Richtung



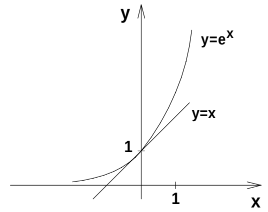
4. allgemein



Die natürliche Exponentialfunktion (e^x)

1. Die Eulersche Zahl e: $\boxed{e = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \approx 2{,}72}$

2. Die e-Funktion: $\boxed{\mathbf{f : x \to e^x \ , \ \square = \square \ , \ W = \square^+}}$



a) **Spezielle Werte:** $e^0 = 1, \quad e^1 = e\ , \quad e^{\ln(x)} = x$

b) **Funktionsgleichungen:** (1) $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$ (2) $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$ (3) $(e^x)^k = e^{kx}$

c) **Ableitung:** $\boxed{\mathbf{f'(x) = e^x}}$

bei Verkettung:

$f(x) = e^{g(x)} \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

Beispiele: $f(x) = e^{kx} \Rightarrow f'(x) = k \cdot e^{kx}$

$f(x) = e^{(x^2)} \Rightarrow f'(x) = 2x \cdot e^{(x^2)}$

d) **Integration:** $\boxed{\int_a^b e^x\,dx = \left[e^x\right]_a^b = e^b - e^a}$

Beispiel:

$$\int_a^b e^{-2x+1}\,dx = \left[-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x+1}\right]_a^b = -\frac{1}{2}\cdot e^{-2b+1} + \frac{1}{2}\cdot e^{-2a+1}$$

e) **wichtige Grenzwerte:** $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x^r \cdot e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^r}{e^x} = 0\ ,\ r \in Q}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^r \cdot e^x = 0\ ,\ r\in Q}$

Wachstums- und Zerfallsprozesse:

1.) exponentielles Wachstum:

Ein Wachstumsprozess heißt **exponentiell**, wenn sich die wachsende Größe in festen Zeitabschnitten mit demselben Faktor multipliziert:

$\mathbf{f(x+h)=q \cdot f(x)}$

oder:

Ein Wachstumsprozess heißt **exponentiell**, wenn die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(x)$ proportional zur wachsenden Größe $f(x)$ ist.

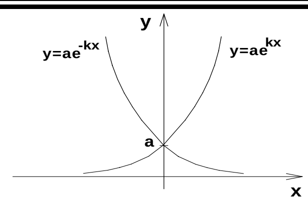
Differenzialgleichung:

$\boxed{\mathbf{f'(x) = k \cdot f(x)}}$

(k :Wachstumskonstante)

k>0: Wachstum

k<0: Zerfall



Wachstumsfunktion: $\boxed{\mathbf{f(x) = a \cdot e^{kx}}}$

a=f(0) : Anfangswert

Verdopplungszeit, Halbwertzeit: $\mathbf{T = \dfrac{\ln 2}{|k|}}$

2.) beschränktes Wachstum:

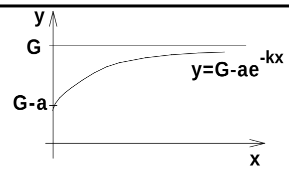
Ein Wachstumsprozess heißt **beschränkt**, wenn die Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Sättigungsmanko (dem zur Sättigung noch fehlenden Bestand) ist.

Differenzialgleichung:

$\boxed{\mathbf{f'(x) = k \cdot (S - f(x))}}$

(S : Sättigung)

(k: Wachstumskonstante)



Wachstumsfunktion: $\boxed{\mathbf{f(x) = S - a \cdot e^{-kx}}}$

3.) logistisches Wachstum:

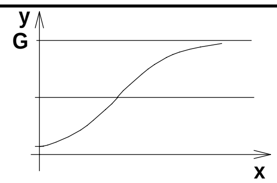
Ein Wachstumsprozess heißt **logistisch**, wenn die Wachstumsgeschwindigkeit $f'(x)$ proportional zur wachsenden Größe $f(x)$ und zum Sättigungsmanko $(S-f(x))$ ist.

Differenzialgleichung:

$\boxed{\mathbf{f'(x) = k \cdot f(x) \cdot (S - f(x))}}$

(S : Sättigung)

(k: Wachstumskonstante)



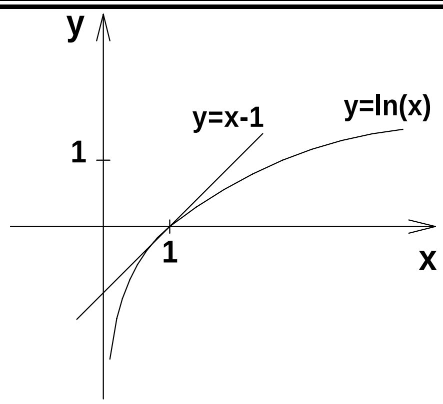
Wachstumsfunktion:

$$\boxed{f(x) = \frac{S}{1 + a \cdot e^{-kSx}}}$$

Die natürliche Logarithmusfunktion f(x) = ln(x)

Die ln-Funktion:

$f : x \to \ln(x)$, □ = □$^+$, W = □



a) Spezielle Werte: $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$; $\ln(e^x) = x$

b) Funktionalgleichungen: (1) $\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v)$; (2) $\ln(\frac{u}{v}) = \ln(u) - \ln(v)$; (3) $\ln(u^k) = k \cdot \ln(u)$

c) Ableitung:

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

bei Verkettung: $f(x) = \ln(g(x)) \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$

Beispiel:

$f(x) = \ln(x^2 + 1) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

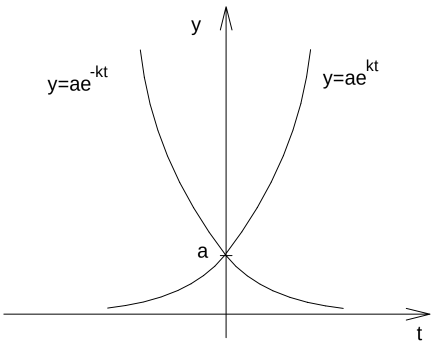
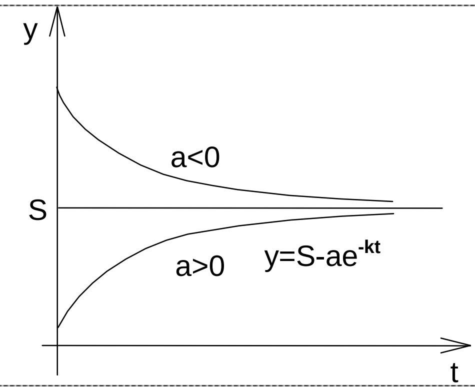
d) Integration:

$$\boxed{\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \Big[\ln|x|\Big]_a^b}$$

$$\boxed{\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt}$$

Beispiel:

$$\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln(5) - \frac{1}{2}\ln(3)$$

Name	**exponentielles Wachstum**	**beschränktes Wachstum**
Modell	Das Wachstum ist umso schneller, je größer der Bestand ist. Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Bestand	Das Wachstum ist umso schneller, je größer die Differenz zwischen Grenze S und Bestand ist. Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Sättigungsmanko
Differential- Gleichung	$f'(t) = k \cdot f(t)$	$f'(t) = k \cdot (S - f(t))$
Lösung	$f(t) = a\,e^{kt}$ (a freier Parameter)	$f(t) = S - a\,e^{-kt}$ (a freier Parameter)
Anfangswert	f(0) = a	f(0) = S - a
Charakteristikum	Verdopplung/ Halbierung in immer gleichen Zeitspannen $T = \frac{\ln 2}{\lvert k\rvert}$	Halbierung der Differenz des Bestandes zur Grenze in immer gleichen Zeitspannen
Schaubild		
Beispiele	Bevölkerungsentwicklung, Zinseszins, radioaktiver Zerfall	Erwärmung, Abkühlung eines Getränkes Verkauf eines Produktes

logistisches Wachstum

Das Wachstum ist umso schneller, je größer das Produkt aus dem Bestand und der Differenz zwischen Grenze S und Bestand ist
Wachstumsgeschwindigkeit proportional zum Produkt aus Bestand und Sättigungsmanko

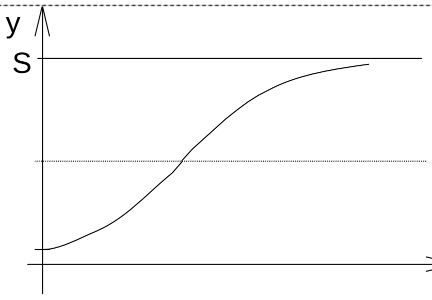
$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (S - f(t))$

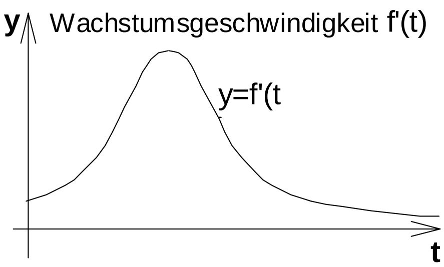
$$f(t) = \frac{S}{1 + a \cdot e^{-kSt}} \quad \text{bzw.} \quad f(t) = \frac{a \cdot S}{a + (S - a)e^{-kSt}}$$

(a freier Parameter)

$f(0) = \frac{S}{1+a}$ bzw. f(0) = a

Wendepunkt (größte Wachstumsgeschwindigkeit) bei der Hälfte S/2, davor beschleunigtes, danach verlangsamtes Wachstum





Ausbreitung einer Krankheit,
Wachstum einer Population in einem beschränkten Lebensraum

Folgen – Grenzwert von Folgen

Definition 1:
Eine **reelle Zahlenfolge** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Funktion, die jeder natürlichen Zahl $n\in\mathbb{N}$ eine reelle Zahl a_n (das n.-te Folgenglied) zuordnet. Folgenglieder : $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$

Definition 2:
Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **nach oben (nach unten) beschränkt**, wenn es eine Zahl M (bzw. m) gibt. so dass für alle a_n gilt : $a_n \le M$ (bzw. $a_n \ge m$) .

Definition 3:
Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **monoton steigend (monoton fallend)**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt :
$a_n \le a_{n+1}$ (bzw. $a_n \ge a_{n+1}$) , also: $a_0 \le a_1 \le a_2$ ..... (bzw. $a_0 \ge a_1 \ge a_2$ .....)

Definition 4:
Eine **Zahlenfolge konvergiert und hat den Grenzwert g** ($\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = g$), wenn gilt:

Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es eine Folgennummer n_0 , so dass für alle $n \ge n_0$ gilt : $|a_n - g| < \varepsilon$
(in Worten : für jede noch so kleine Zahl $\varepsilon > 0$ findet man eine Zahl n_0, so dass ab dieser Nummer n_0 alle Folgenglieder sich vom Grenzwert g um weniger als ε unterscheiden.)

Beispiel:

Die Folge $(a_n) = (\frac{n^2}{n^2+1})$ hat den Grenzwert g = 1, denn : sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben:

$$\left|\frac{n^2}{n^2+1}-1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{n^2-(n^2+1)}{n^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n^2+1}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon}-1$$

$$\Leftrightarrow n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$$

also: wähle als n_0 die erste natürliche Zahl, die größer als $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}-1}$ ist.

Dann gilt für alle $n \ge n_0$: $|a_n - 1| < \varepsilon$, also ist g=1 der Grenzwert der Zahlenfolge.

Rekursiv definierte Folgen:

Anfangsglied: a_0 ; Rekursion : $a_{n+1} = f(a_n)$ (die Rekursionsformel gibt an, wie sich das nachfolgende Folgenglied aus dem vorangehenden berechnet)

Beispiele :
1.) $a_0 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$: (1, 3, 5, 7, ...)
2.) $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...) Fibonacci-Folge)

Arithmetische Folgen:
Anfangswert a_0 ; Rekursion : $a_{n+1} = a_n + d$ (Beispiel : 1, 4, 7, 10, 13, ...)

Geometrische Folgen:
Anfangswert a_0 ; Rekursion : $a_{n+1} = q \cdot a_n$ (Beispiel : 1, 2, 4, 8, 16, ...)
$(a_0, a_0 \cdot q, a_0 \cdot q^2, a_0 \cdot q^3, \ldots)$
(Bemerkung: ist $|q| < 1$ so konvergiert die geometrische Folge $(a_0 \cdot q^n)$ gegen 0 ($\lim\limits_{n\to\infty}(a_0 \cdot q^n) = 0$ **)**

Vollständige Induktion

Das Beweisverfahren der **vollständigen Induktion** kann immer dann angewendet werden, wenn eine Aussage bewiesen werden soll, die **für alle natürlichen Zahlen** gilt.
(formal : Eine Aussage A(n) gilt für alle $n \in \mathbb{N}$)

Beweisverfahren der vollständigen Induktion:
Das Beweisverfahren besteht aus 2 Schritten, die bewiesen werden müssen:

1. **Induktionsanfang:**
   Die Aussage A(n) gilt für den Anfangswert (z.B. n=1 oder für n=0)
2. **Induktionsschluss:**
   Wenn die Aussage A(n) für ein n gilt, dann gilt sie auch für das nachfolgende n+1 .

Aus 1. und 2. folgt : Die Aussage A(n) gilt für alle n≥1 (bzw. für alle n größer gleich dem Anfangswert)

formal: 1.) A(1) gilt (bzw. A(0) gilt)
2.) Wenn A(n) gilt, dann gilt auch A(n+1) .
Aus (1) und (2) folgt : A(n) gilt für alle n≥1 (n größer gleich dem Anfangswert 0)

Beispiel 1: Für alle $n \geq 1$ gilt : $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ (A(n))

(Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen ist gleich $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$)

Beweis: 1.) A(1) gilt, denn: $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$ ist wahr (Induktionsanfang)

2.) zu zeigen : (Induktionsschluss)

Wenn $1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ *gilt,* **(Induktionsvoraussetzung A(n))**

dann gilt : $1 + 2 + ... + n + (n+1) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ **(Induktionsbehauptung A(n+1))**

$\mathbf{1 + 2 + ... + n} + (n+1) = \mathbf{\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)} + (n+1) = (n+1) \cdot [\frac{1}{2} \cdot n + 1] = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (n+2)$

(nach Induktionsvoraussetzung) (ausklammern) (ausklammern)

also: $1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$ gilt für alle $n \geq 1$

Beispiel 2: Für alle $n \geq 1$ gilt : Nehmen an einem Turnier n Mannschaften teil , so gibt es $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ verschiedene Paarungen . (A(n))

Beweis: 1.) A(1) gilt, denn: bei einer Mannschaft gibt es $0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0$ Paarungen (Induktionsanfang)

2.) zu zeigen : (Induktionsschluss)

Wenn es bei n Mannschaften $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ *Paarungen gibt,* **(Induktionsvoraussetzung A(n))**

dann gibt es bei (n+1) Mannschaften $\frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$ *Paarungen.* **(Induktionsbehauptung A(n+1))**

Bei (n+1) Mannschaften gibt es nach Induktionsvoraussetzung zwischen den ersten n Mannschaften $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ Paarungen,

die dazukommende (n+1). Mannschaft muss gegen jede der ersten n Mannschaften spielen, also kommen noch n Paarungen dazu, also sind es:

$\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1) + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot [(n-1) + 2] = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot n$ Paarungen (was zu beweisen war) .