

Aufgaben-Pool Kl. 8

Linearisierbare Prozesse

1. Preiserhöhung

Letzte Woche ist der Preis für Diesel-Treibstoff von 0,849 € pro Liter auf 0,889 € pro Liter gestiegen. Der Kommentar von Ingo war: „Preiserhöhungen interessieren mich nicht. Ich tanke eh’ immer für 50 €“

- Um wie viele Prozent ist der Preis gestiegen?
- Wie viele Liter weniger bekommt man nach der Preiserhöhung für 50 €?
- Wie viele Prozent der Diesel-Menge vor der Preiserhöhung bekommt man noch nach der Preiserhöhung?
- Wie viel Euro mehr muss für eine Tankfüllung von 56 l bezahlt werden?

2. Heizöl

Herr Müller braucht für den Winter Heizöl. Seine Heizölfirma macht ihm zwei Angebote:

A: Grundpreis für die Anlieferung 40 € Literpreis 0,395 €

B: Grundpreis für die Anlieferung 60 € Literpreis 0,375 €

- Bei welcher Abnahmemenge müsste Herr Müller bei beiden Angeboten den gleichen Preis bezahlen?

Herr Müller will 3500 Liter abnehmen.

- Für welches Angebot sollte er sich entscheiden?
- Wie viel muss er dann bezahlen?
- Wie viel würde ihn das andere Angebot mehr kosten? Welchen Literpreis bezahlt Herr Müller letztlich?

3. Taschengeld

Mimi hat am Dienstag, den 1. Januar, 10 € Sie bekommt pro Woche 2€ und zwar immer am Mittwoch. Alle vier Wochen kauft sie sich am Montag eine Zeitschrift für 4,50 €

- Begründe, dass bei dieser Situation Mimi auf die Dauer immer mehr Geld haben wird.
- Berechne die mittlere Zunahme ihres „Vermögens“ pro Monat.
- Wann hat sie erstmals über 30 €?
- Wann hat sie letztmals unter 30 €?

4. Ferienwohnung

Familie Müller möchte in den Sommerferien für drei Wochen eine Ferienwohnung an der Ostsee mieten. Diese Wohnung kostet in der Hauptsaison €450 pro Woche, während der Nebensaison gibt es einen Nachlass von 15 %. Zwei der Urlaubswochen von Familie Müller liegen in der Hauptsaison, eine in der Nebensaison.

- Wie viel muss Familie Müller für ihre Ferienwohnung bezahlen?
- Wie viel kostet die Ferienwohnung für drei Wochen in der Nebensaison?

5. Bahntarife

Die Bahn führt wieder einmal ein neues Tarifsystem ein.

Dabei gibt es die Möglichkeit sich für €60 eine Bahngrundkarte für ein halbes Jahr zu kaufen. Besitzt man diese Karte, so kostet der gefahrene Kilometer 12 Cent. Ohne Bahngrundkarte muss man 25 Cent für den gefahrenen Kilometer bezahlen.

- Wie viel muss man für eine Strecke von 700 km mit und ohne Bahngrundkarte bezahlen?
- Gib die Funktionsgleichung für die Zuordnung Fahrpreis in Abhängigkeit von den gefahrenen Kilometern für beide Zahlungsmöglichkeiten an.
- Stelle die beiden Funktionen in einem gemeinsamen Koordinatensystem dar. (0 bis 1000 km)
- Wie viele Kilometer muss man mindestens fahren, damit sich die Anschaffung einer Bahngrundkarte lohnt?

6. Auto

Ein Auto fährt von A über B nach C. Bis zum Punkt B, der 5,0 km von A entfernt ist, fährt es mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h, ab Punkt B die restlichen 12,0 km mit durchschnittlich 90 km/h.

- Wie lange ist es von A nach C unterwegs?
(Alternative a*: Fertige ein Diagramm an, in dem die Zeit in Abhängigkeit von der Entfernung von A dargestellt ist. Wie lange ist das Auto von A nach C unterwegs?)
- Wie viele Kilometer ist es nach genau 9 Minuten von A entfernt, wenn man annimmt, dass die ganze Zeit mit der Durchschnittsgeschwindigkeit gefahren wird?
- Wie schnell müsste es durchschnittlich zwischen B und C fahren, um genau 1 Minute Fahrzeit einzusparen?

7. Sanduhr

In einer Sanduhr sind 75 mm^3 Sand enthalten. Die Verengung in der Mitte ist so groß, dass sie $0,25 \text{ mm}^3$ Sand pro Sekunde hindurchrieseln lässt.

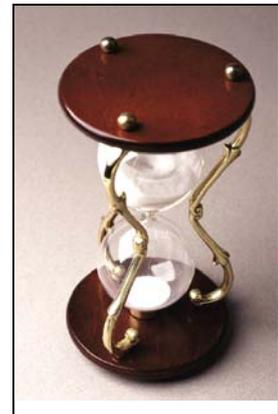
- Stelle eine Funktionsgleichung auf, die der verstrichenen Zeit das in der oberen Hälfte verbliebene Sandvolumen zuordnet und zeichne den Graphen!
- Nach welcher Zeit befindet sich der gesamte Sand in der unteren Hälfte?
- Nach welcher Zeit befinden sich in der oberen Hälfte noch 20 mm^3 Sand?

Ich esse mein Frühstücksei gern mit einer Kochzeit von 6 min.

- Wie viel Sand müsste ich in diese Sanduhr füllen, damit sie 6 min. misst?
- Wie viel Sand müsste die Öffnung pro Sekunde hindurch lassen, damit die Sanduhr mit der ursprünglichen Sandmenge 6 min misst?

Alternativ zu d) und e):

Ich esse mein Frühstücksei gern mit 6 min Kochzeit. Nenne zwei Möglichkeiten, wie man die Sanduhr verändern müsste, damit sie 6 min misst, und ermittle die neuen Funktionsgleichungen! Erläutere dabei, was diese Veränderungen konkret für die Sanduhr bedeuten.



8. Fliesenarbeiten

Auf einer Baustelle sollen Fliesen verlegt werden. Es werden von verschiedenen Unternehmen Angebote eingeholt.

Firma Fixfliese stellt pro Quadratmeter Fliesen fertig verlegt 125,50 € in Rechnung und einmalig pauschal für die Anfahrten und Vorbereitungsarbeiten 500,- €

Firma Gründlich verlangt pro Quadratmeter Fliesen fertig verlegt 135,- € und für Anfahrten und Vorbereitungsarbeiten einmalig 350 €

- a) Zeichne für beide Angebote die Funktionen Kosten in Abhängigkeit von der Fliesenfläche in ein Koordinatensystem (0 bis 40 m² Fliesen) und lies ab, für welche Auftragsgröße die Firma Gründlich billiger ist und für welche Firma Fixfliese.
- b) Bestimme die Auftragsmenge, ab der die Firma Fixfliese billiger ist, **rechnerisch**.
- c) Wie hoch ist die Rechnung bei beiden Firmen bei der in b) ermittelten Auftragsmenge?
- d) Firma Industrie-Fliese möchte in den Markt einsteigen, ist aber nur an Großaufträgen interessiert. In der Werbekampagne steht:
„Fliesen fertig verlegt für nur 100 € pro Quadratmeter!“
 Die Werbung verschweigt dabei die Höhe der Pauschale für die Anfahrten und Vorbereitungsarbeiten. Diese hat die Firma so kalkuliert, dass sie erst dann günstiger ist als beide Konkurrenten, wenn mindestens 200 Quadratmeter Fliesen zu verlegen sind. Wie hoch also hat sie diese Pauschale kalkuliert?

9. Jugendherberge

In einer Jugendherberge können 145 Jugendliche in 35 Zimmern übernachten. Es gibt nur Dreibett- und Fünfbettzimmer.

Wie viele Zimmer von jeder Sorte befinden sich in dieser Jugendherberge?

10. Rechteck aus Draht

Ein Draht von 64 cm Länge soll zu einem Rechteck gebogen werden, bei dem die größere Seite viermal so lang ist wie die kleinere.

Wie lang müssen die Rechteckseiten gewählt werden?

11. Zwei Esel

Zwei Esel tragen Säcke. Da sagt der eine Esel zum anderen: “Wenn du mir einen Sack abgibst, dann tragen wir beide gleich viel.“ Der andere Esel erwidert: “Wenn du mir einen Sack abgibst, dann trage ich doppelt so viel wie du.“

Wie viele Säcke trägt der eine, wie viele der andere Esel?

12. Boot im Fluss

Ein Boot erreicht bei gleich bleibender Strömung flussabwärts eine Durchschnittsgeschwindigkeit relativ zum Ufer von 4 m/s, flussaufwärts dagegen nur 1,5 m/s.

Berechne die Eigengeschwindigkeit des Bootes und die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses.

Lösungen

Linearisierbare Prozesse

1. Preiserhöhung

- Der Preis für Diesel ist um 4,71 % gestiegen.
- $d = \frac{50}{0,849} - \frac{50}{0,889}$: Man bekommt 2,65 l weniger.
- Man bekommt noch 95,5% der Menge vor der Preiserhöhung.
Also: Die Preiserhöhung um 4,71 % entspricht einer Mengenreduktion um 4,50%.
- Man muss 2,24 € mehr zahlen.

2. Heizöl

Als Funktionen formuliert lauten die Angebote

$$A(m) = 40 + 0,395m \quad \text{und} \quad B(m) = 60 + 0,375m.$$

- Bei einer Abnahmemenge von 1000 l herrscht Preis-Gleichstand.
- Nach dem Ergebnis in a) ist das Angebot B günstiger.
- Er muss dabei 1372,50 € zahlen.
- Das Angebot A würde ihn 50 € mehr kosten.
Bei Angebot B zahlt er letztlich 0,392 € / l.

3. Taschengeld

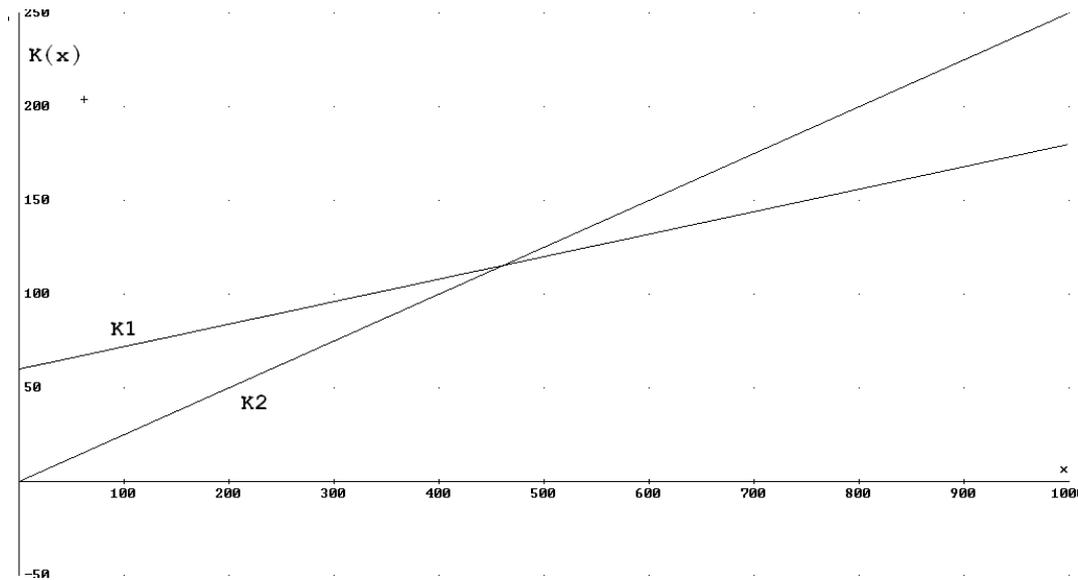
- Im Monat erhält Mimi (mindestens) viermal Taschengeld, also (mindestens) 8 €. Sie gibt einmal pro Monat 4,50 € aus, behält also im Monat (mindestens) 3,50 € übrig.
- Unter der Annahme von vier Mittwoch-Tagen im Monat wächst Mimis „Vermögen“ im Mittel um 3,50 € pro Monat.
Geht man von 52 Taschengeld-Zahlungen im Jahr aus, aber weiterhin nur von 12 Zeitschriften, so nimmt Mimis „Vermögen“ sogar im Mittel um 4,17 € pro Monat zu; bei 13 Zeitschriften im Jahr um 3,79 € pro Monat.
- Da die Aufgabe nicht genau spezifiziert, wann im Jahr zum ersten Mal eine Zeitschrift gekauft wird, ist dieses Datum nicht sicher anzugeben. Unter der Annahme, dass die erste Zeitschrift am Montag, den 7. Januar, gekauft wird, erhält man den Mittwoch, der 23 Wochen nach dem 2. Januar liegt – also den 13. Juni -, als den Tag, an dem der Kontostand mit 31 € erstmalig über dreißig Euro liegt..
- Zwei Wochen später wird dann die Zone unter 30 € endgültig verlassen.

4. Ferienwohnung

- Familie Müller muss 1282,50 € zahlen.
- Die Wohnung kostet 1147,50 €.

5. Bahntarife

- Kosten mit Bahnkarte K_1 : $K_1 = 60 \text{ €} + 700 \cdot 0,12 \text{ €} = 144 \text{ €}$.
Kosten ohne Bahnkarte K_2 : $K_2 = 700 \cdot 0,25 \text{ €} = 175 \text{ €}$.
- x: Anzahl der gefahrenen Kilometer, K: Fahrpreis in €.
 $K_1(x) = 60 + 0,12x$
 $K_2(x) = 0,25x$



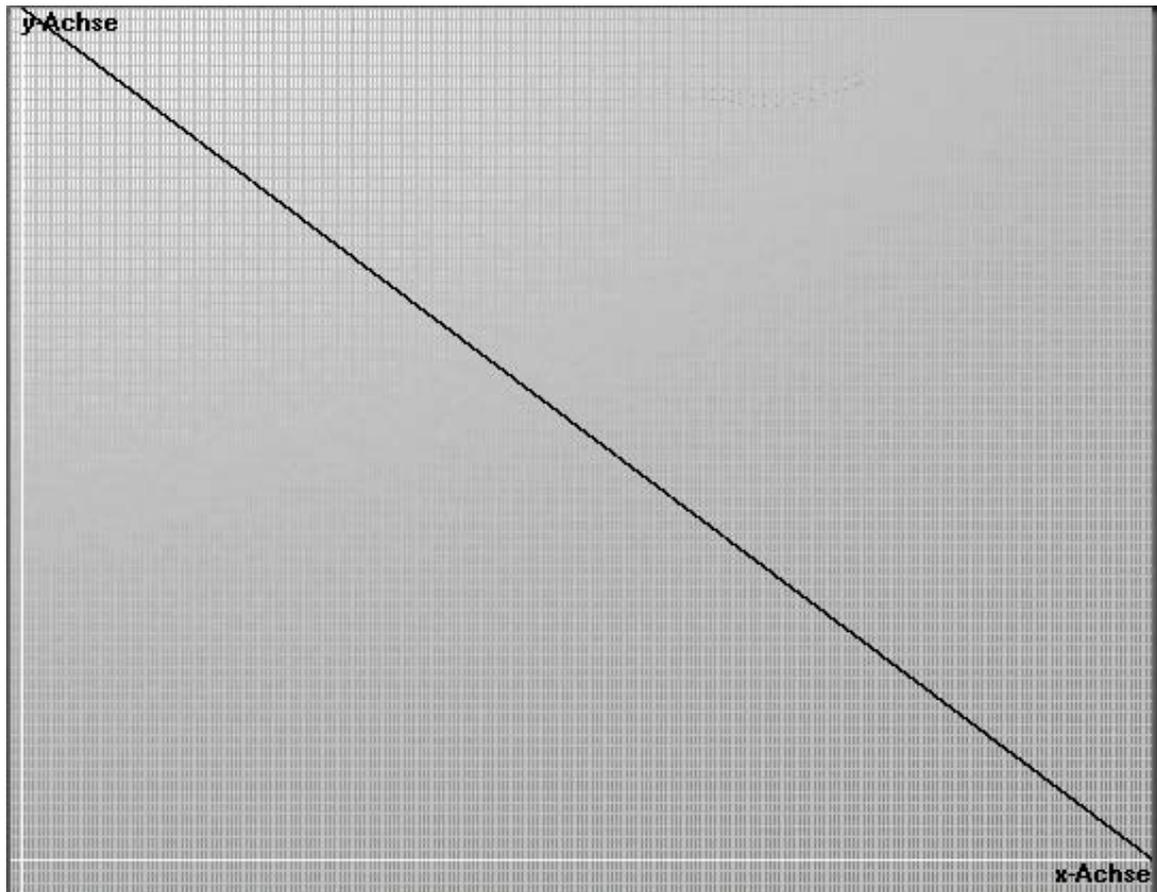
- c) $K_1(x) = K_2(x) \Leftrightarrow 60 + 0,12x = 0,25x \Leftrightarrow x = 461,54$
 Fährt man mehr als 461,54 km im halben Jahr, so lohnt sich die Anschaffung einer Bahngrundkarte.
 (Das Ablesen im Koordinatensystem ist ebenfalls möglich.)

6. Auto

- Für den ersten Teil der Strecke braucht das Auto 6 Minuten, für den zweiten 8 Minuten, also insgesamt 14 Minuten.
- Gemeint ist hier die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit. – Nach insgesamt neun Minuten Fahrt befindet sich das Auto seit drei Minuten im zweiten Teil der Strecke, hat also bei der dortigen Durchschnittsgeschwindigkeit 4,5 km zurückgelegt. Die Entfernung von A beträgt damit 9,5 km.
- Um von den acht Minuten auf dem zweiten Abschnitt eine Minute zu sparen, muss das Auto mit knapp 103 km/h fahren.

7. Sanduhr

- $f(t) = 75 - 0,25t$



b) Wenn sich der gesamte Sand in der unteren Hälfte befindet, ist die obere Hälfte leer

$$0 = 75 - 0,25t$$

$$t = 75 : 0,25 = 300$$

Nach 300 Sekunden (5 min) befindet sich der gesamte Sand in der unteren Hälfte.

c)

$$20 = 75 - 0,25t$$

$$t = 55 : 0,25 = 220$$

Nach 220 Sekunden (3 min 40 s) befinden sich im oberen Teil der Sanduhr noch 20 mm^3 Sand.

d) Sechs Minuten entsprechen 360 Sekunden. Nach 360 Sekunden soll die Sanduhr bei gleicher Laufgeschwindigkeit leer sein. Sind Sandmenge wird mit S bezeichnet.

$$0 = S - 0,25 \cdot 360$$

$$S = 0,25 \cdot 360 = 90$$

Es müssten 90 mm^3 Sand in der Sanduhr vorhanden sein.

e) $t = 360 \text{ s}$; die Durchlassmenge wird mit d bezeichnet

$$0 = 75 - 360d$$

$$d = 75 : 360 = \frac{5}{24} \approx 0,2083$$

Die Öffnung müsste ungefähr $0,2083 \text{ mm}^3$ Sand pro Sekunde hindurch lassen.

Alternativ zu d) und e):

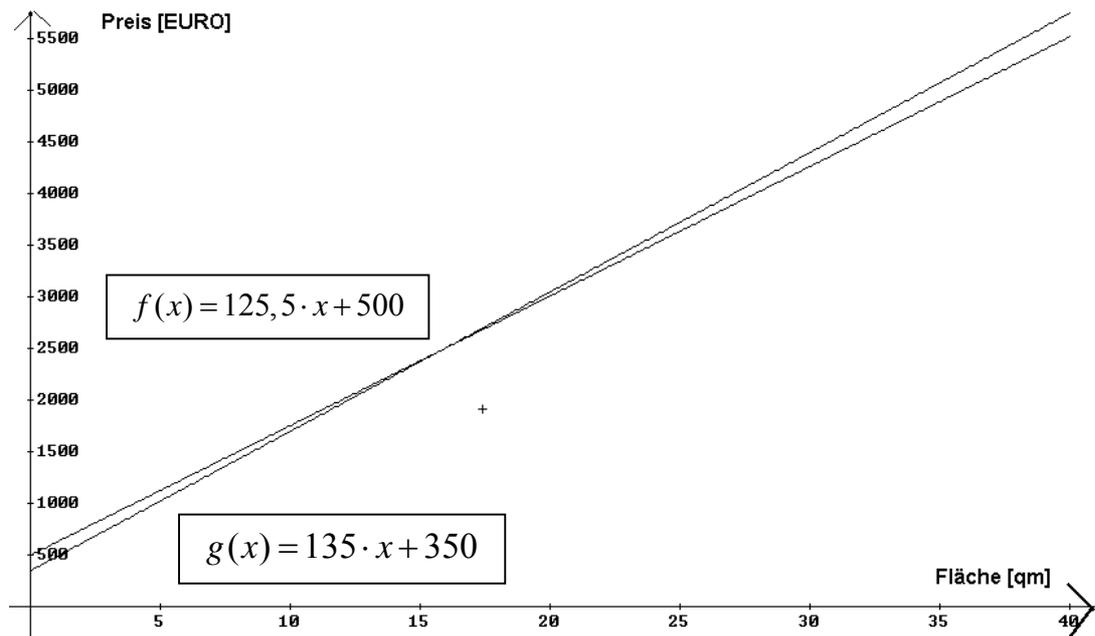
Man müsste entweder die Öffnung verkleinern, damit der Sand langsamer läuft, oder man müsste die Sandmenge erhöhen. S bezeichnet die Sandmenge, d die Durchlassmenge.

$$0 = S - 0,25 \cdot 360$$

$$0 = 75 - 360d$$

8. Fliesenarbeiten

a)



Für ca. 16 Quadratmeter sind beide Angebote preislich gleich. Für geringere Flächen ist die Firma "Gründlich" günstiger, für größere die Firma "Fixfliese"

b) $f(x) = g(x)$

$$\Leftrightarrow 125,5 \cdot x + 500 = 135 \cdot x + 350$$

$$\Leftrightarrow 9,5 \cdot x = 150$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{300}{19}$$

$$\Rightarrow x \approx 15,8$$

Ab 15,8 qm Fliesenfläche ist die Firma "Fixfliese" günstiger.

c) $f\left(\frac{300}{19}\right) = g\left(\frac{300}{19}\right) = 2481,58$

15,8 qm Fliesenfläche liefern beide Firmen zum gleichen Preis von 2481,58 EUR .

d) Wir lösen die Gleichung $f(200) = 100 \cdot x + g$ nach g auf:

$$125 \cdot 200 + 500 = 100 \cdot 200 + g$$

$$\Leftrightarrow g = 5600$$

Die Firma "Industrie-Fliese" kalkuliert also einen sehr hohen Grundpreis von 5600 EUR, die Werbung ist irreführend.

9. Jugendherberge

Das Problem wird durch die beiden Gleichungen $145 = 3 \cdot x + 5 \cdot y$ und $35 = x + y$ beschrieben.

$$\begin{array}{r} \text{I} \qquad \qquad \qquad x + y = 35 \\ \wedge \text{II} \qquad \qquad 3x + 5y = 145 \\ \hline \text{I}' \qquad \qquad \qquad y = 35 - x \\ \text{I}' \text{ in II} \quad 3x + 175 - 5x = 145 \\ \qquad \qquad \qquad x = 15 \\ \qquad \qquad \qquad y = 20 \end{array}$$

Es gibt 15 Dreibett- und 20 Fünfbettzimmer.

10. Rechteck aus Draht

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad 2x + 2y = 64 \\ \wedge \text{II} \quad y = 4x \\ \hline \text{II in I} \quad 2x + 8x = 64 \\ \quad \quad \quad x = 6,4 \\ \text{II} \quad \quad \quad y = 25,6 \end{array}$$

Die Rechteckseiten müssen jeweils eine Länge von 6,4 cm und 25,6 cm besitzen.

11. Zwei Esel

x: Anzahl der Säcke vom 1. Esel

y: Anzahl der Säcke vom 2. Esel

$$\begin{array}{r} \text{1. Esel:} \quad \text{I} \quad x + 1 = y - 1 \\ \text{2. Esel:} \quad \wedge \text{II} \quad 2(x - 1) = y + 1 \\ \quad \quad \quad \text{I}' \text{ in II} \quad 2x - 2 = x + 3 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x = 5 \\ \quad \quad \quad \quad \quad y = 7 \end{array}$$

Ein Esel trägt 5, der andere 7 Säcke.

Hinweis: Diese Aufgabe wurde in der diesjährigen Mathematik-Olympiade in der ersten Runde für die 7. Klassenstufe gestellt.

12. Boot im Fluss

$$\begin{array}{r} \text{I} \quad v_B + v_{\text{Str}} = 4 \\ \wedge \text{II} \quad v_B - v_{\text{Str}} = 1,5 \\ \hline \text{II}' \quad v_B = 1,5 + v_{\text{Str}} \\ \text{II}' \text{ in I} \quad 2 v_{\text{Str}} + 1,5 = 4 \\ \quad \quad \quad v_{\text{Str}} = 1,25 \\ \text{II}' \quad \quad \quad v_B = 2,75 \end{array}$$

Das Boot hat eine Eigengeschwindigkeit von 2,75 m/s; die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses beträgt 1,25 m/s.