

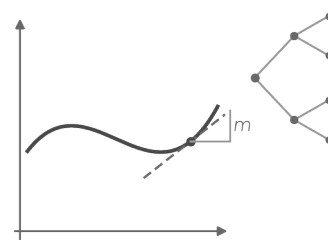
Mathematik Klasse 11

Thema: Übung zur Zentralen Klausur – Analysis und Wahrscheinlichkeit

Name: _____ Datum: _____

Punkte: _____ / 41 Note: _____

Unterschrift: _____



Teil 1 ohne Hilfsmittel (17 Punkte)

1 Ableitungen bilden

Bestimme jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x - 1$

b) $g(x) = \frac{1}{3} x^6 - \frac{3}{2} x^2 + 4$

c) $h(x) = (x + 2) \cdot (x - 5)$

d) $k(x) = x^3 \cdot (2 - x)$

____ / 4

2 Aussagen über eine Parabel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. **Kreuze an**, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Aussage	richtig	falsch
Es gilt $f'(3) = 0$.	☐	☐
Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel.	☐	☐
Im Punkt $P(1 \mid 0)$ hat der Graph von f die Steigung 4.	☐	☐
Für $x > 3$ ist f streng monoton steigend.	☐	☐

____ / 2

3 Gleichungen lösen

Löse die Gleichungen ohne Hilfsmittel.

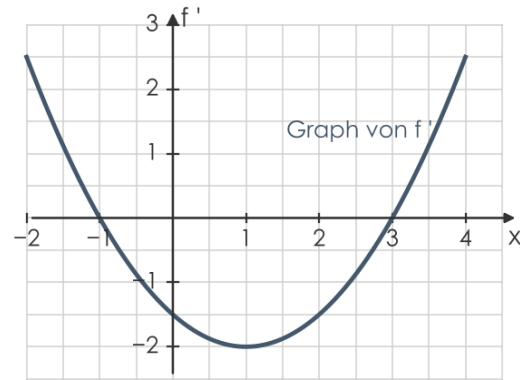
a) $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$

b) $3 \cdot 2^{x+1} = 48$

____ / 4

4 Vom Graphen der Ableitung auf f schließen

Die Abbildung zeigt den Graphen der **Ableitungsfunktion** f' einer Funktion f .



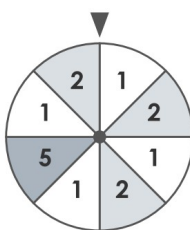
- a) **Gib** die Extremstellen von f **an** und **entscheide** jeweils, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt. **Begründe** mit dem Graphen von f' .

- b) **Gib** die Wendestelle von f **an**.

- c) **Gib** das Intervall **an**, in dem f streng monoton fällt.

___ / 4

5 Glücksrad



Das Glücksrad hat acht gleich große Felder. Es wird **zweimal** gedreht.

- a) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, zweimal die 1 zu drehen.

- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 3 ist.

- c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die 5 zu drehen.

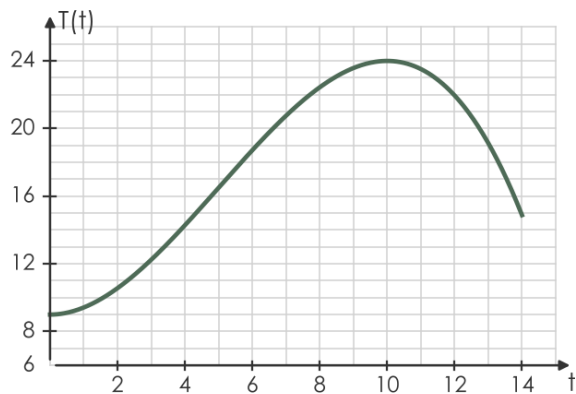
___ / 3

6 Funktionsuntersuchung im Sachzusammenhang: Temperaturverlauf

An einem Sommertag wird auf einem Schulhof die Lufttemperatur gemessen. Sie wird für $0 \leq t \leq 14$ beschrieben durch

$$T(t) = -0,03t^3 + 0,45t^2 + 9$$

(t in Stunden nach 5 Uhr, $T(t)$ in $^{\circ}\text{C}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von T .



- a) **Berechne** $T(0)$ und $T(14)$ und **interpretiere** $T(14)$ im Sachzusammenhang.

- b) **Bestimme** rechnerisch die höchste Temperatur im Messzeitraum und die zugehörige Uhrzeit.

- c) **Bestimme** den Zeitpunkt, zu dem die Temperatur am stärksten steigt, und **gib** die Zunahme pro Stunde dann **an**.

- d) **Ermittle** mithilfe des GTR, wie lange die Temperatur über 20°C lag.

7 Exponentielle Abnahme: Koffein im Körper

Nach einer Tasse Kaffee befinden sich 160 mg Koffein (K) im Körper. Pro Stunde werden 15 % der jeweils vorhandenen Menge abgebaut.

- a) **Gib** einen Term für $K(t)$ an (t in Stunden).
 b) **Berechne** die Koffeinmenge nach 3 Stunden.
 c) **Berechne** die Halbwertszeit.

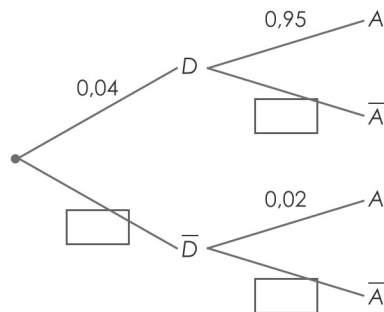
- d) **Bestimme**, nach wie vielen Stunden weniger als 20 mg Koffein im Körper sind.

___ / 6

8 Bedingte Wahrscheinlichkeit: Qualitätskontrolle

Ein Betrieb stellt Fahrradlampen her; 4 % der Lampen sind defekt (D). Ein Prüfgerät sortiert 95 % der defekten Lampen aus (A), aber auch 2 % der intakten Lampen.

- a) **Ergänze** die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm.



- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe aussortiert wird.

- c) Eine Lampe wurde aussortiert. **Berechne** $P_A(D)$ und **deute** den Wert.

- d) **Berechne** den Anteil aller Lampen, die defekt sind und nicht aussortiert werden, und **beurteile** das Prüfverfahren.

___ / 7

Lösung: Mathematik Klasse 11 – Übung zur Zentralen Klausur

Insgesamt sind 41 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
41–37 P.	36,5–33 P.	32,5–27 P.	26,5–20,5 P.	20–12,5 P.	12–0 P.

Teil 1 ohne Hilfsmittel (17 Punkte)

1 Ableitungen bilden

Bestimme jeweils die erste Ableitung.

a) $f(x) = 3x^5 - 4x^3 + 2x - 1$

$f'(x) = 15x^4 - 12x^2 + 2$

b) $g(x) = \frac{1}{3}x^6 - \frac{3}{2}x^2 + 4$

$g'(x) = 2x^5 - 3x$

c) $h(x) = (x + 2) \cdot (x - 5)$

$h(x) = x^2 - 3x - 10; h'(x) = 2x - 3$

d) $k(x) = x^3 \cdot (2 - x)$

$k(x) = 2x^3 - x^4; k'(x) = 6x^2 - 4x^3$

4 / 4

2 Aussagen über eine Parabel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 6x - 5$. **Kreuze an**, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Aussage	richtig	falsch
Es gilt $f'(3) = 0$.	☒	☐
Der Graph von f ist eine nach oben geöffnete Parabel.	☐	☒
Im Punkt $P(1 \mid 0)$ hat der Graph von f die Steigung 4.	☒	☐
Für $x > 3$ ist f streng monoton steigend.	☐	☒

2 / 2

3 Gleichungen lösen

Löse die Gleichungen ohne Hilfsmittel.

a) $x^3 + 2x^2 - 15x = 0$

$x \cdot (x^2 + 2x - 15) = 0$

$L = \{-5; 0; 3\}$

b) $3 \cdot 2^{x+1} = 48$

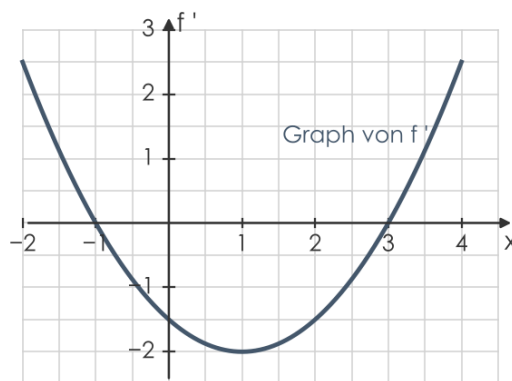
$2^{x+1} = 16 = 2^4$

$x + 1 = 4 \Rightarrow x = 3$

4 / 4

4 Vom Graphen der Ableitung auf f schließen

Die Abbildung zeigt den Graphen der **Ableitungsfunktion** f' einer Funktion f .



- a) **Gib** die Extremstellen von f **an** und **entscheide** jeweils, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt. **Begründe** mit dem Graphen von f' .

Hochpunkt bei $x = -1$, da f'

dort von $+$ nach $-$ wechselt;

Tiefpunkt bei $x = 3$, da f'

dort von $-$ nach $+$ wechselt.

- b) **Gib** die Wendestelle von f **an**.

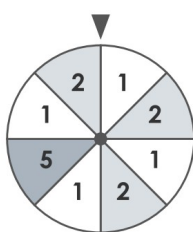
$x = 1$ (Tiefpunkt von f')

- c) **Gib** das Intervall **an**, in dem f streng monoton fällt.

$-1 < x < 3$ (dort $f'(x) < 0$)

4 / 4

5 Glücksrad



Das Glücksrad hat acht gleich große Felder. Es wird **zweimal** gedreht.

- a) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, zweimal die 1 zu drehen.

$$P(1; 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe 3 ist.

$$P = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

- c) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die 5 zu drehen.

$$P = 1 - \frac{7}{8} \cdot \frac{7}{8} = 1 - \frac{49}{64} = \frac{15}{64}$$

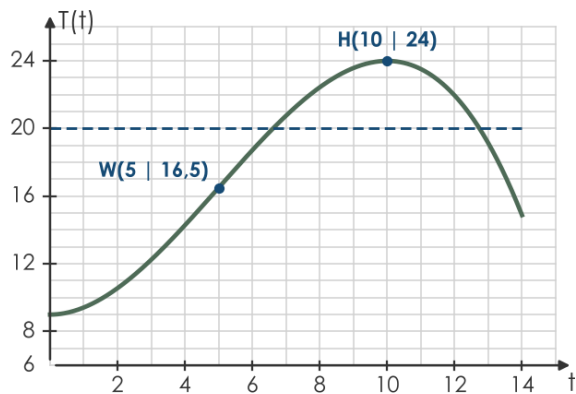
3 / 3

6 Funktionsuntersuchung im Sachzusammenhang: Temperaturverlauf

An einem Sommertag wird auf einem Schulhof die Lufttemperatur gemessen. Sie wird für $0 \leq t \leq 14$ beschrieben durch

$$T(t) = -0,03t^3 + 0,45t^2 + 9$$

(t in Stunden nach 5 Uhr, $T(t)$ in $^{\circ}\text{C}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von T .



- a) **Berechne** $T(0)$ und $T(14)$ und **interpretiere** $T(14)$ im Sachzusammenhang.

$$T(0) = 9; T(14) \approx 14,9$$

Um 19 Uhr: etwa $14,9^{\circ}\text{C}$.

- b) **Bestimme** rechnerisch die höchste Temperatur im Messzeitraum und die zugehörige Uhrzeit.

$$T'(t) = -0,09t^2 + 0,9t = -0,09t \cdot (t - 10) = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ oder } t = 10$$

$$T''(t) = -0,18t + 0,9; T''(10) = -0,9 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt } H(10 | 24)$$

$$\text{Randwerte: } T(0) = 9; T(14) \approx 14,9 \text{ (beide kleiner als 24)}$$

Höchste Temperatur: 24°C um 15 Uhr

- c) **Bestimme** den Zeitpunkt, zu dem die Temperatur am stärksten steigt, und **gib** die Zunahme pro Stunde dann **an**.

$$T''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 5; T'''(5) = -0,18 \neq 0; T'(5) = -2,25 + 4,5 = 2,25$$

Um 10 Uhr steigt sie am stärksten, um $2,25^{\circ}\text{C}$ pro Stunde.

- d) **Ermittle** mithilfe des GTR, wie lange die Temperatur über 20°C lag.

$$T(t) = 20 \Rightarrow t_1 \approx 6,61 \text{ und } t_2 \approx 12,74 \text{ (dazwischen gilt } T(t) > 20)$$

Etwa 6,1 Stunden lang über 20°C (etwa 11:37 bis 17:44 Uhr).

7 Exponentielle Abnahme: Koffein im Körper

Nach einer Tasse Kaffee befinden sich 160 mg Koffein (K) im Körper. Pro Stunde werden 15 % der jeweils vorhandenen Menge abgebaut.

- a) **Gib** einen Term für K(t) **an** (t in Stunden).

$$K(t) = 160 \cdot 0,85^t$$

- b) **Berechne** die Koffeinmenge nach 3 Stunden.

$$K(3) \approx 98,3 \text{ mg}$$

- c) **Berechne** die Halbwertszeit.

$$t = \ln(0,5) : \ln(0,85)$$

$$\approx 4,3 \text{ Stunden}$$

- d) **Bestimme**, nach wie vielen Stunden weniger als 20 mg Koffein im Körper sind.

$$160 \cdot 0,85^t = 20 \Leftrightarrow 0,85^t = 0,125 \Rightarrow t = \ln(0,125) : \ln(0,85) \approx 12,8$$

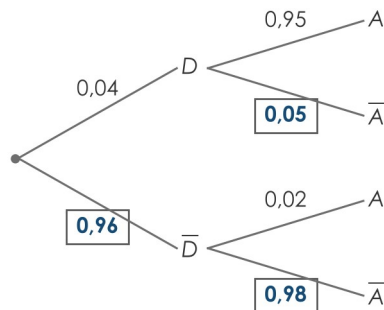
Nach etwa 12,8 Stunden sind weniger als 20 mg im Körper.

6 / 6

8 Bedingte Wahrscheinlichkeit: Qualitätskontrolle

Ein Betrieb stellt Fahrradlampen her; 4 % der Lampen sind defekt (D). Ein Prüfgerät sortiert 95 % der defekten Lampen aus (A), aber auch 2 % der intakten Lampen.

- a) **Ergänze** die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm.



- b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lampe aussortiert wird.

$$P(A) = 0,04 \cdot 0,95 +$$

$$0,96 \cdot 0,02 = 0,0572$$

- c) Eine Lampe wurde aussortiert. **Berechne** $P_A(D)$ und **deute** den Wert.

$$P_A(D) = 0,038 : 0,0572$$

$$\approx 0,664; 66,4 \% \text{ der}$$

aussortierten sind defekt.

- d) **Berechne** den Anteil aller Lampen, die defekt sind und nicht aussortiert werden, und **beurteile** das Prüfverfahren.

$$P(D \cap \bar{A}) = 0,04 \cdot 0,05 = 0,002, \text{ also } 0,2 \%. \text{ Beispiel: Defekte werden}$$

fast immer erkannt, aber etwa jede dritte aussortierte ist intakt.

7 / 7