

Mathematik Klasse 12

Thema: Übung zum Abitur – Stochastik und Geometrie

Name: _____ Datum: _____

Punkte: ____ / 51 Note: ____

Unterschrift: _____

Prüfungsteil A

ohne Hilfsmittel
23 Punkte

Prüfungsteil B

mit Taschenrechner
und Formelsammlung
28 Punkte

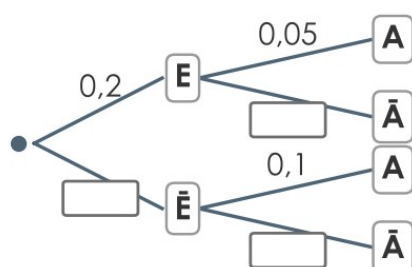
Viel Erfolg!

Prüfungsteil A – ohne Hilfsmittel

1 Rücksendungen bei einem Onlinehändler

Ein Onlinehändler verschickt 20 % der Bestellungen per Express (E), den Rest per Standardversand. Zurückgeschickt (A) werden 5 % der Express- und 10 % der Standardsendungen. Eine Bestellung wird zufällig gewählt.

a) **Ergänze** die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm.



b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass die Bestellung zurückgeschickt wird.

c) Die Bestellung wurde zurückgeschickt. **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit für Expressversand.

___ / 5

2 Gewinnlose

Jedes Los einer Tombola gewinnt unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit 0,2. Mia kauft drei Lose; X ist die Anzahl ihrer Gewinnlose.

a) **Begründe**, dass X binomialverteilt ist, und **gib** n und p **an**.

b) **Berechne** $P(X = 0)$. _____ c) **Berechne** $P(X \geq 1)$. _____

d) **Berechne** $P(X = 2)$. _____ e) **Berechne** $E(X)$. _____

___ / 5

3 Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 0 \mid 1)$, $B(4 \mid 2 \mid 0)$ und $C(1 \mid 2 \mid 3)$.

a) **Zeige**, dass das Dreieck ABC bei A einen rechten Winkel hat.

b) **Zeige**, dass ABC gleichschenkelig ist, und **berechne** den Flächeninhalt.

c) **Bestimme** den Punkt D so, dass ABDC ein Quadrat ist.

___ / 5

4 Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

a) **Berechne** die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen. b) **Prüfe**, ob $P(1 \mid 2 \mid 1)$ in E liegt.

c) **Berechne** den Abstand des Punktes $Q(4 \mid 3 \mid 5)$ von der Ebene E.

___ / 5

5 Kreuze an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Aussage	richtig	falsch
Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kollinear.	☐	☐
Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.	☐	☐
Die Ebene $x_1 + x_2 = 4$ ist parallel zur x_3 -Achse.	☐	☐
Sind A und B unabhängig, so gilt $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.	☐	☐
X binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0,3$: $E(X) = 3,3$.	☐	☐
Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3.	☐	☐

___ / 3

Prüfungsteil B – mit Hilfsmitteln (Taschenrechner, Formelsammlung)

6 LED-Lampen

Ein Betrieb stellt LED-Lampen her, 4 % davon sind defekt. X sei die als binomialverteilt angenommene Anzahl defekter Lampen in einer Stichprobe.

a) Für 50 Lampen: **Berechne** die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

E_1 : Genau zwei Lampen sind defekt. _____

E_2 : Höchstens drei Lampen sind defekt. _____

E_3 : Mehr als eine Lampe ist defekt. _____

b) **Berechne** Erwartungswert und Standardabweichung von X für $n = 50$.

c) **Bestimme**, wie viele Lampen man mindestens entnehmen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine defekte Lampe darunter ist.

___ / 8

7 Hypothesentest zu den LED-Lampen aus Aufgabe 6

a) Ein Kunde vermutet, dass mehr als 4 % der Lampen defekt sind. $H_0: p \leq 0,04$ wird mit 100 Lampen auf dem Signifikanzniveau 5 % getestet. **Gib** die Gegenhypothese **an** und **ermittle** die Entscheidungsregel. Nutze die Tabelle ($n = 100$, $p = 0,04$, gerundet).

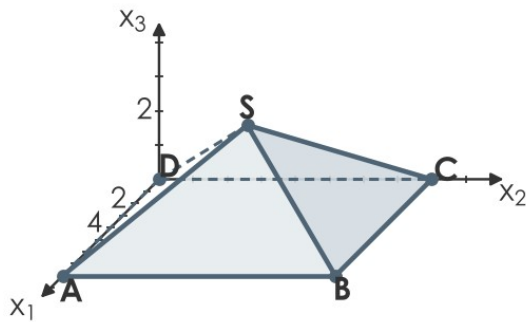
k	5	6	7	8	9
$P(X \leq k)$	0,7884	0,8936	0,9525	0,9810	0,9932

b) In der Stichprobe sind 7 Lampen defekt. **Gib** die Entscheidung **an** und **beschreibe** den Fehler, der dabei möglich ist.

___ / 6

8 Pavillondach

Das Dach eines Pavillons hat die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit den Eckpunkten $A(8 \mid 0 \mid 0)$, $B(8 \mid 8 \mid 0)$, $C(0 \mid 8 \mid 0)$, $D(0 \mid 0 \mid 0)$ und der Spitze $S(4 \mid 4 \mid 3)$; 1 LE entspricht 1 m.



- a) **Berechne** die Länge der Dachkante AS und den Winkel, den sie mit der Grundfläche einschließt.

- b) **Ermittle** eine Gleichung der Ebene F, in der die Dachfläche BCS liegt, in Koordinatenform.

- c) **Berechne** den Neigungswinkel der Dachfläche BCS gegenüber der Grundfläche.

___ / 8

9 Fortsetzung: Pavillondach aus Aufgabe 8

- a) **Untersuche** die gegenseitige Lage der Geraden AS und BD.

- b) **Berechne** den Abstand des Mittelpunkts M der Grundfläche von der Ebene F.

- c) **Berechne** das Volumen des Dachraums.

___ / 6

Lösung: Übung zum Abitur: Stochastik und Geometrie

Insgesamt sind 51 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
51–46 P.	45,5–41 P.	40,5–33,5 P.	33–25,5 P.	25–15,5 P.	15–0 P.

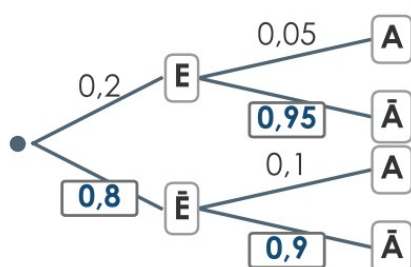
Prüfungsteil A – ohne Hilfsmittel

1 Rücksendungen bei einem Onlinehändler

5 / 5

Ein Onlinehändler verschickt 20 % der Bestellungen per Express (E), den Rest per Standardversand. Zurückgeschickt (A) werden 5 % der Express- und 10 % der Standardsendungen. Eine Bestellung wird zufällig gewählt.

a) **Ergänze** die fehlenden Wahrscheinlichkeiten im Baumdiagramm.



b) **Berechne** die Wahrscheinlichkeit, dass die Bestellung zurückgeschickt wird.

$$P(A) = 0,2 \cdot 0,05 + 0,8 \cdot 0,1$$

$$= 0,01 + 0,08 = 0,09$$

c) Die Bestellung wurde zurückgeschickt. **Bestimme** die Wahrscheinlichkeit für Expressversand.

$$P_A(E) = \frac{P(E \cap A)}{P(A)} = \frac{0,01}{0,09} = \frac{1}{9} \approx 0,111$$

2 Gewinnlose

5 / 5

Jedes Los einer Tombola gewinnt unabhängig von den anderen mit der Wahrscheinlichkeit 0,2. Mia kauft drei Lose; X ist die Anzahl ihrer Gewinnlose.

a) **Begründe**, dass X binomialverteilt ist, und **gib** n und p **an**.

unabhängig, nur Gewinn/Niete, p fest: n = 3, p = 0,2

b) **Berechne** $P(X = 0)$. $0,8^3 = 0,512$ c) **Berechne** $P(X \geq 1)$. $0,488$

d) **Berechne** $P(X = 2)$. $0,096$ e) **Berechne** $E(X)$. $0,6$

3 Gegeben sind die Punkte A(2 | 0 | 1), B(4 | 2 | 0) und C(1 | 2 | 3).

5 / 5

a) **Zeige**, dass das Dreieck ABC bei A einen rechten Winkel hat.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -2 + 4 - 2 = 0 \Rightarrow \text{rechter Winkel bei A}$$

b) **Zeige**, dass ABC gleichschenkelig ist, und **berechne** den Flächeninhalt.

$$|AB| = \sqrt{9} = 3 = |AC|, \text{ also gleichschenkelig; } A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 4,5 \text{ (FE)}$$

c) **Bestimme** den Punkt D so, dass ABDC ein Quadrat ist.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, D(3 | 4 | 2)$$

5 / 5

4 Gegeben ist die Ebene E: $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

a) **Berechne** die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen. b) **Prüfe**, ob $P(1 | 2 | 1)$ in E liegt.

$$S_1(3 | 0 | 0), S_2(0 | 6 | 0),$$

$$2 + 2 + 2 = 6 \Rightarrow P \in E$$

$$S_3(0 | 0 | 3)$$

c) **Berechne** den Abstand des Punktes $Q(4 | 3 | 5)$ von der Ebene E.

$$d = |2 \cdot 4 + 3 + 2 \cdot 5 - 6| : \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 15 : 3$$

$$= 5 \text{ (LE)}$$

3 / 3

5 Kreuze an, ob die Aussage richtig oder falsch ist.

Aussage	richtig	falsch
Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ sind kollinear.	☒	☐
Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind orthogonal.	☐	☒
Die Ebene $x_1 + x_2 = 4$ ist parallel zur x_3 -Achse.	☒	☐
Sind A und B unabhängig, so gilt $P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.	☐	☒
X binomialverteilt mit $n = 10$, $p = 0,3$: $E(X) = 3,3$.	☐	☒
Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ hat die Länge 3.	☒	☐

6 LED-Lampen

Ein Betrieb stellt LED-Lampen her, 4 % davon sind defekt. X sei die als binomialverteilt angenommene Anzahl defekter Lampen in einer Stichprobe.

a) Für 50 Lampen: **Berechne** die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse.

E_1 : Genau zwei Lampen sind defekt. $P(X = 2) \approx 0,2762$

E_2 : Höchstens drei Lampen sind defekt. $P(X \leq 3) \approx 0,8609$

E_3 : Mehr als eine Lampe ist defekt. $1 - P(X \leq 1) \approx 0,5995$

b) **Berechne** Erwartungswert und Standardabweichung von X für $n = 50$.

$\mu = 50 \cdot 0,04 = 2$; $\sigma = \sqrt{50 \cdot 0,04 \cdot 0,96} = \sqrt{1,92} \approx 1,39$

c) **Bestimme**, wie viele Lampen man mindestens entnehmen muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine defekte Lampe darunter ist.

$1 - 0,96^n \geq 0,95 \Rightarrow 0,96^n \leq 0,05 \Rightarrow n \geq \ln 0,05 : \ln 0,96 \approx 73,4$

Man muss mindestens 74 Lampen entnehmen.

7 Hypothesentest zu den LED-Lampen aus Aufgabe 6

a) Ein Kunde vermutet, dass mehr als 4 % der Lampen defekt sind. $H_0: p \leq 0,04$ wird mit 100 Lampen auf dem Signifikanzniveau 5 % getestet. **Gib** die Gegenhypothese **an** und **ermittle** die Entscheidungsregel. Nutze die Tabelle ($n = 100$, $p = 0,04$, gerundet).

k	5	6	7	8	9
$P(X \leq k)$	0,7884	0,8936	0,9525	0,9810	0,9932

$H_1: p > 0,04$; gesucht: kleinstes k mit $P(X \geq k) \leq 0,05$

$P(X \geq 8) = 1 - 0,9810 = 0,0190$; $P(X \geq 7) = 0,0475 > 0,05$

Ab 8 defekten Lampen wird H_0 abgelehnt, sonst nicht.

b) In der Stichprobe sind 7 Lampen defekt. **Gib** die Entscheidung **an** und **beschreibe** den Fehler, der dabei möglich ist.

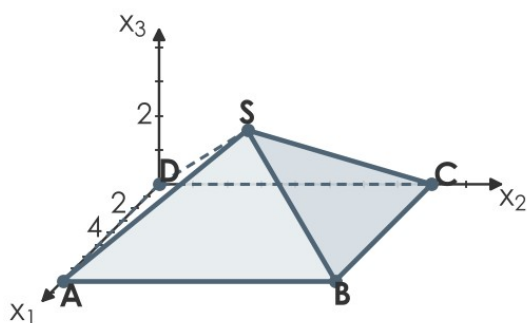
$7 < 8$: H_0 wird nicht abgelehnt.

Möglich: Fehler 2. Art ($p > 0,04$, H_0 aber beibehalten).

8 Pavillondach

8 / 8

Das Dach eines Pavillons hat die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit den Eckpunkten A(8 | 0 | 0), B(8 | 8 | 0), C(0 | 8 | 0), D(0 | 0 | 0) und der Spitze S(4 | 4 | 3); 1 LE entspricht 1 m.



- a) **Berechne** die Länge der Dachkante AS und den Winkel, den sie mit der Grundfläche einschließt.

$$|AS| = \sqrt{(16 + 16 + 9)}$$

$$= \sqrt{41} \approx 6,40 \text{ m}$$

$$\sin \alpha = 3 : \sqrt{41} \Rightarrow \alpha \approx 27,9^\circ$$

- b) **Ermittle** eine Gleichung der Ebene F, in der die Dachfläche BCS liegt, in Koordinatenform.

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ und } \vec{n} \cdot \overrightarrow{BS} = -12 + 12 = 0$$

$$F: 3x_2 + 4x_3 = 24 \quad (\text{Probe mit B: } 24 = 24)$$

- c) **Berechne** den Neigungswinkel der Dachfläche BCS gegenüber der Grundfläche.

$$\cos \beta = |0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1| : (5 \cdot 1) = 0,8 \Rightarrow \beta \approx 36,9^\circ$$

9 Fortsetzung: Pavillondach aus Aufgabe 8

6 / 6

- a) **Untersuche** die gegenseitige Lage der Geraden AS und BD.

$$AS: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad BD: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{nicht parallel; I: } 8 - 4r = 8 - 8s; \text{ II: } 4r = 8 - 8s; \text{ III: } 3r = 0$$

$$\text{III: } r = 0; \text{ I: } s = 0; \text{ in II: } 0 = 8, \text{ Widerspruch}$$

Die Geraden sind windschief.

- b) **Berechne** den Abstand des Mittelpunkts M der Grundfläche von der Ebene F.

$$M(4 | 4 | 0)$$

$$d = |3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 - 24| : 5 = 2,4 \text{ m}$$

- c) **Berechne** das Volumen des Dachraums.

$$V = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 3 = 64 \text{ m}^3$$