

Mathematik Klasse 12

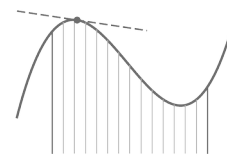
Thema: Übung zum Abitur – Analysis

Name: _____ Datum: _____

Punkte (BE): _____ / 50 Note: _____

Unterschrift: _____

Hilfsmittel: Teil A keine; Teil B WTR oder CAS, Formelsammlung



Viel Erfolg!

Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel (20 BE)

1 Ableitungsregeln

Bestimme jeweils die erste Ableitung (in c) gilt $x > 0$).

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

b) $g(x) = (2x - 5)^4$

c) $h(x) = \ln(3x) + \frac{2}{x}$

____ / 4

2 Integral und Stammfunktion

a) **Berechne** $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx$

b) Gegeben ist $f(x) = 4e^{2x} - \frac{3}{x}$ mit $x > 0$.

Bestimme diejenige Stammfunktion F von f , deren Graph durch den Punkt $P(1 \mid 2e^2 + 5)$ verläuft.

____ / 4

3 Exponentialgleichung

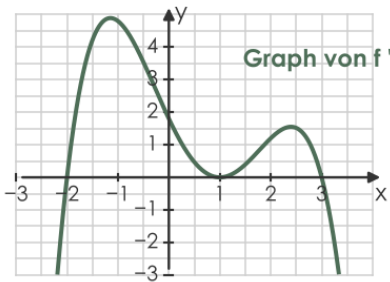
Löse die Gleichung $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

____ / 3

4 Eigenschaften von f aus dem Graphen von f' ablesen

M1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f .

M1



a) **Entscheide**, ob die Aussagen über f richtig (r) oder falsch (f) sind. Kreuze an.

Aussage	r	f
(1) Tiefpunkt von f bei $x = -2$	☐	☐
(2) Extrempunkt von f bei $x = 1$	☐	☐
(3) f steigt monoton auf $[-2; 3]$	☐	☐
(4) $f(0) > f(2)$	☐	☐

b) **Begründe** deine Wahl bei (2).

___ / 3

5 Tangente

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$.

a) **Ermittle** eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f in $P(2 \mid f(2))$.

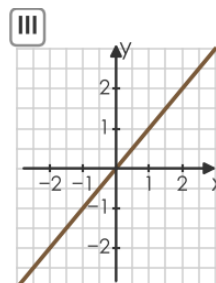
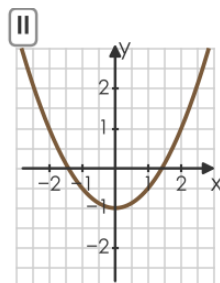
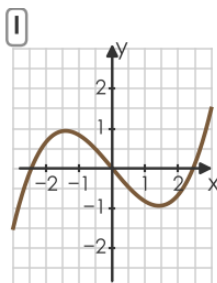
b) **Gib** alle Stellen **an**, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente hat.

___ / 3

6 Funktion, Ableitung und Stammfunktion

In M2 gehört ein Graph zu einer Funktion f , einer zu f' und einer zu einer Stammfunktion F von f .

M2



a) **Ordne** die Graphen I, II und III zu.

	Graph
f	
f'	
F	

b) **Begründe** deine Zuordnung für zwei der Graphen.

___ / 3

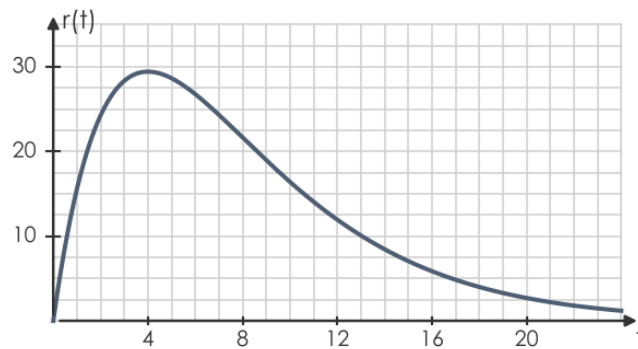
7 Modellierung: Zufluss in einen Speicherteich

Nach einem Starkregen fließt Wasser über einen Graben in einen Speicherteich. Die Zuflussrate wird für $0 \leq t \leq 24$ modellhaft beschrieben durch

$$r(t) = 20t \cdot e^{-0,25t}$$

(t in Stunden nach Beginn der Messung, $r(t)$ in m^3 pro Stunde). Material M3 zeigt den Graphen von r .

M3



- a) **Berechne** $r(2)$ und **interpretiere** den Wert im Sachzusammenhang.

- b) **Zeige**, dass $r'(t) = 5 \cdot (4 - t) \cdot e^{-0,25t}$ gilt, und **bestimme** rechnerisch die maximale Zuflussrate.

- c) Es gilt $r''(t) = 1,25 \cdot (t - 8) \cdot e^{-0,25t}$. **Bestimme** die Wendestelle von r und **deute** sie im Sachzusammenhang.

- d) **Weise nach**, dass $R(t) = -80 \cdot (t + 4) \cdot e^{-0,25t}$ eine Stammfunktion von r ist.

8 Fortsetzung: Wassermenge im Speicherteich

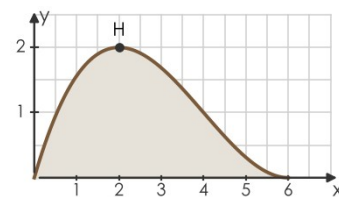
- a) **Berechne** die Wassermenge, die in den ersten 12 Stunden zufließt, und die mittlere Zuflussrate in diesem Zeitraum.
- b) Zu Beginn enthält der Teich 500 m^3 Wasser; ab $t = 0$ werden konstant $15 \text{ m}^3/\text{h}$ abgepumpt. **Ermittle** den Zeitraum, in dem die Wassermenge zunimmt, und **berechne** die größte Wassermenge.

___ / 8

9 Modellierung: Querschnitt eines Lärmschutzwalls

Der Querschnitt eines Lärmschutzwalls wird durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben ($x, f(x)$ in m). Er beginnt im Ursprung, hat den Hochpunkt $H(2 \mid 2)$ und läuft bei $x = 6$ waagerecht aus (M4).

M4



- a) **Bestimme** einen Funktionsterm von f .
- b) **Berechne** die Stelle, an der der Wall am steilsten abfällt, und den Neigungswinkel dort.
- c) **Berechne** die Querschnittsfläche und das Erdvolumen eines 150 m langen Walls.

___ / 11

Lösung: Übung zum Abitur Mathematik: Analysis

Insgesamt sind 50 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
50–45 P.	44,5–40 P.	39,5–32,5 P.	32–25 P.	24,5–15 P.	14,5–0 P.

Prüfungsteil A ohne Hilfsmittel (20 BE)

1 Ableitungsregeln

Bestimme jeweils die erste Ableitung (in c) gilt $x > 0$).

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ b) $g(x) = (2x - 5)^4$ c) $h(x) = \ln(3x) + \frac{2}{x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \\ &= (2x - x^2) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Kettenregel:} \\ g'(x) &= 8 \cdot (2x - 5)^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{3}{3x} - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} \end{aligned}$$

4 / 4

2 Integral und Stammfunktion

a) **Berechne** $\int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx = [x^3 - x^2 + x]_0^2 = 8 - 4 + 2 - 0 = 6$

b) Gegeben ist $f(x) = 4e^{2x} - \frac{3}{x}$ mit $x > 0$.

Bestimme diejenige Stammfunktion F von f , deren Graph durch den Punkt $P(1 \mid 2e^2 + 5)$ verläuft.

$$F(x) = 2e^{2x} - 3 \cdot \ln(x) + C$$

$$F(1) = 2e^2 - 3 \cdot \ln(1) + C = 2e^2 + C = 2e^2 + 5 \Rightarrow C = 5$$

$$F(x) = 2e^{2x} - 3 \cdot \ln(x) + 5$$

4 / 4

3 Exponentialgleichung

Löse die Gleichung $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$.

$$u = e^x: u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$\Rightarrow u = 1 \text{ oder } u = 2$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0; e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$$

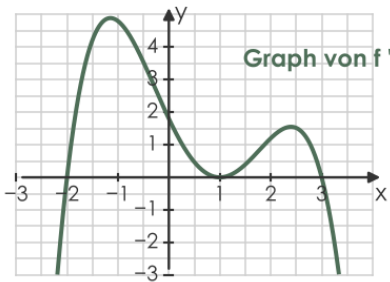
$$L = \{0; \ln(2)\}$$

3 / 3

4 Eigenschaften von f aus dem Graphen von f' ablesen

M1 zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.

M1



a) **Entscheide**, ob die Aussagen über f richtig (r) oder falsch (f) sind. Kreuze an.

Aussage	r	f
(1) Tiefpunkt von f bei $x = -2$	☒	☐
(2) Extrempunkt von f bei $x = 1$	☐	☒
(3) f steigt monoton auf $[-2; 3]$	☒	☐
(4) $f(0) > f(2)$	☐	☒

b) **Begründe** deine Wahl bei (2).

$f'(1) = 0$, aber kein VZW von $f' \Rightarrow$ Sattelpunkt

3 / 3

5 Tangente

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 - 3x$.

a) **Ermittle** eine Gleichung der Tangente t an den Graphen von f in $P(2 \mid f(2))$.

$$f(2) = 2; f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

$$t: y = 9 \cdot (x - 2) + 2 = 9x - 16$$

b) **Gib** alle Stellen **an**, an denen der Graph von f eine waagerechte Tangente hat.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1$$

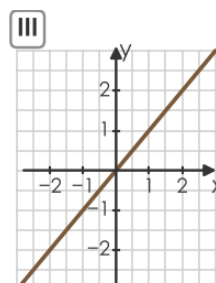
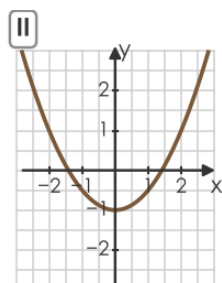
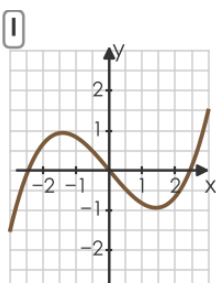
$$\Rightarrow x = -1 \text{ und } x = 1$$

3 / 3

6 Funktion, Ableitung und Stammfunktion

In M2 gehört ein Graph zu einer Funktion f, einer zu f' und einer zu einer Stammfunktion F von f.

M2



a) **Ordne** die Graphen I, II und III zu.

	Graph
f	II
f'	III
F	I

b) **Begründe** deine Zuordnung für zwei der Graphen.

$$\text{Nullstellen von II} = \text{Extremstellen von I} \Rightarrow \text{I} = \text{F}$$

$$\text{Tiefpunkt von II} = \text{Nullstelle von III} \Rightarrow \text{III} = \text{f}'$$

3 / 3

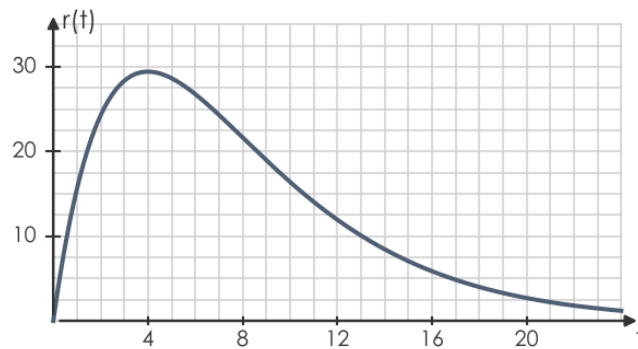
7 Modellierung: Zufluss in einen Speicherteich

Nach einem Starkregen fließt Wasser über einen Graben in einen Speicherteich. Die Zuflussrate wird für $0 \leq t \leq 24$ modellhaft beschrieben durch

$$r(t) = 20t \cdot e^{-0,25t}$$

(t in Stunden nach Beginn der Messung, $r(t)$ in m^3 pro Stunde). Material M3 zeigt den Graphen von r .

M3



- a) **Berechne** $r(2)$ und **interpretiere** den Wert im Sachzusammenhang.

$$r(2) = 40 \cdot e^{-0,5} \approx 24,3$$

Zwei Stunden nach Messbeginn fließen etwa $24,3 \text{ m}^3$ pro Stunde zu.

- b) **Zeige**, dass $r'(t) = 5 \cdot (4 - t) \cdot e^{-0,25t}$ gilt, und **bestimme** rechnerisch die maximale Zuflussrate.

$$r'(t) = 20 \cdot e^{-0,25t} - 5t \cdot e^{-0,25t} = 5 \cdot (4 - t) \cdot e^{-0,25t}$$

$$r'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4, \text{ da } e^{-0,25t} > 0; \text{ Vorzeichenwechsel von + nach -}$$

$$r(4) = 80 \cdot e^{-1} \approx 29,4; \text{ maximale Zuflussrate etwa } 29,4 \text{ m}^3/\text{h nach 4 h}$$

- c) Es gilt $r''(t) = 1,25 \cdot (t - 8) \cdot e^{-0,25t}$. **Bestimme** die Wendestelle von r und **deute** sie im Sachzusammenhang.

$$r''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 8 \text{ mit Vorzeichenwechsel} \Rightarrow \text{Wendestelle } t = 8$$

$$r'(8) = -20 \cdot e^{-2} \approx -2,7; \text{ Nach 8 Stunden nimmt die Zuflussrate}$$

am stärksten ab (um etwa $2,7 \text{ m}^3/\text{h}$ pro Stunde).

- d) **Weise nach**, dass $R(t) = -80 \cdot (t + 4) \cdot e^{-0,25t}$ eine Stammfunktion von r ist.

$$R'(t) = -80 \cdot e^{-0,25t} + (-80) \cdot (t + 4) \cdot (-0,25) \cdot e^{-0,25t}$$

$$= (-80 + 20t + 80) \cdot e^{-0,25t} = 20t \cdot e^{-0,25t} = r(t)$$

8 Fortsetzung: Wassermenge im Speicherteich

- a) **Berechne** die Wassermenge, die in den ersten 12 Stunden zufließt, und die mittlere Zuflussrate in diesem Zeitraum.

$$\int_0^{12} r(t) dt = R(12) - R(0) = 320 - 1280 e^{-3} \approx 256,3$$

Es fließen etwa 256,3 m³ zu; mittlere Rate: 256,3 m³ : 12 h ≈ 21,4 m³/h

- b) Zu Beginn enthält der Teich 500 m³ Wasser; ab t = 0 werden konstant 15 m³/h abgepumpt. **Ermittle** den Zeitraum, in dem die Wassermenge zunimmt, und **berechne** die größte Wassermenge.

Zunahme für r(t) > 15; WTR: r(t) = 15 für t₁ ≈ 0,95 und t₂ ≈ 10,59

V(t) = 500 + R(t) - R(0) - 15t; Maximum bei t₂ (VZW von r - 15)

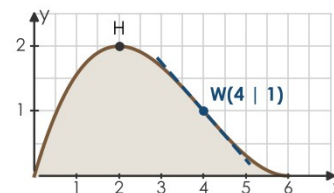
V(10,59) ≈ 578,5 m³ (Randwerte: V(0) = 500 m³, V(24) ≈ 454,4 m³)

8 / 8

9 Modellierung: Querschnitt eines Lärmschutzwalls

Der Querschnitt eines Lärmschutzwalls wird durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschrieben (x, f(x) in m). Er beginnt im Ursprung, hat den Hochpunkt H(2 | 2) und läuft bei x = 6 waagerecht aus (M4).

M4



- a) **Bestimme** einen Funktionsterm von f.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d; f(0) = 0 \Rightarrow d = 0; f(2) = 2: 8a + 4b + 2c = 2$$

$$f'(2) = 0: 12a + 4b + c = 0; f(6) = 0: 216a + 36b + 6c = 0$$

$$\text{WTR: } a = 0,0625; b = -0,75; c = 2,25 \Rightarrow f(x) = 0,0625x^3 - 0,75x^2 + 2,25x$$

- b) **Berechne** die Stelle, an der der Wall am steilsten abfällt, und den Neigungswinkel dort.

$$f''(x) = 0,375x - 1,5 = 0 \Rightarrow x = 4 (f''' \neq 0); W(4 | 1); f'(4) = -0,75$$

$$\text{Steilste Stelle bei } x = 4; \tan(\alpha) = 0,75 \Rightarrow \alpha \approx 36,9^\circ$$

- c) **Berechne** die Querschnittsfläche und das Erdvolumen eines 150 m langen Walls.

$$A = \int_0^6 f(x) dx = \left[\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{8}x^2 \right]_0^6 = 20,25 - 54 + 40,5 = 6,75$$

$$\text{Querschnitt } 6,75 \text{ m}^2; V = 6,75 \text{ m}^2 \cdot 150 \text{ m} = 1012,5 \text{ m}^3$$

11 / 11