

GYMNASIUM · MATHEMATIK

ar

Name: \_\_\_\_\_

Datum: \_\_\_\_\_

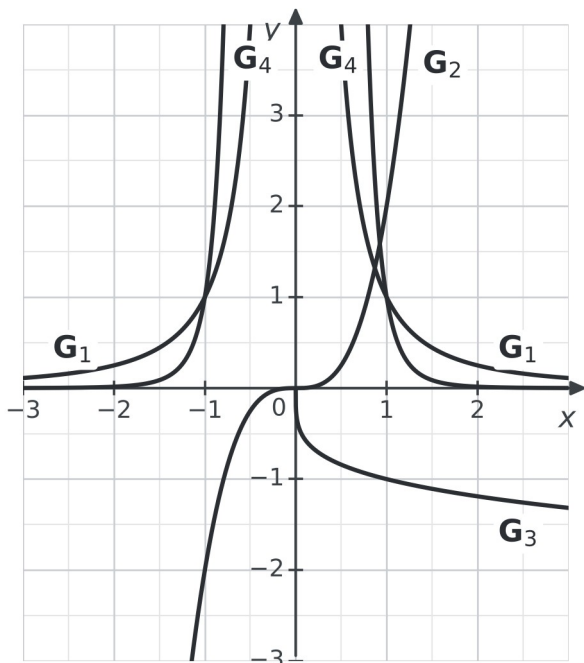
Punkte: \_\_\_\_\_ / 30      Note: \_\_\_\_\_

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Alle Variablen stehen für positive reelle Zahlen,  $n$  ist eine natürliche Zahl.

## 2 Potenzfunktionen

- a) Ordne jedem der Graphen G1 bis G4 den passenden Funktionsterm zu. Trage den Buchstaben in die Tabelle ein. Sechs Terme bleiben übrig.



Funktionsterme f(x):

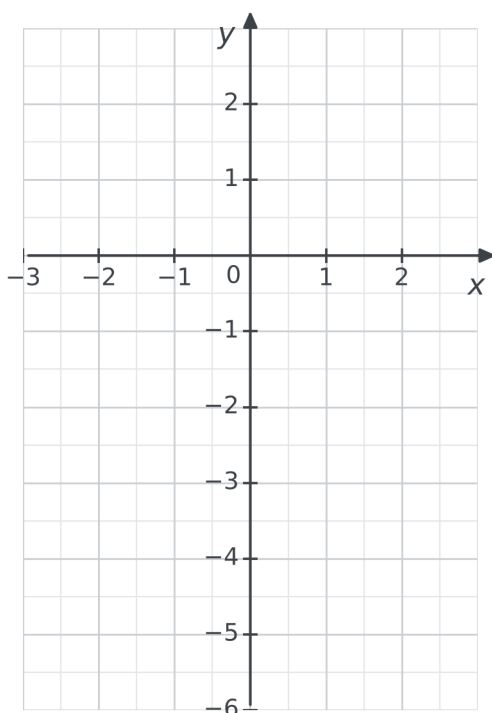
|                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| <b>A</b> $x^3$       | <b>F</b> $x^{-3}$   |
| <b>B</b> $x^{-6}$    | <b>G</b> $x^{-2}$   |
| <b>C</b> $-2x^{1/4}$ | <b>H</b> $x^6$      |
| <b>D</b> $x^{1/4}$   | <b>I</b> $-x^{1/4}$ |
| <b>E</b> $2x^3$      | <b>J</b> $x^{-5}$   |

Zuordnung:

| <b>G<sub>1</sub></b> | <b>G<sub>2</sub></b> | <b>G<sub>3</sub></b> | <b>G<sub>4</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|                      |                      |                      |                      |

- b) Ermittle grafisch, wie viele Lösungen die Gleichung  $(x-1)^3 = \frac{1}{x} - 1$  hat.

Zeichne dazu beide Seiten als Graphen in das Koordinatensystem und gib die Lösungen näherungsweise an.



Platz für Wertetabellen:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Anzahl der Lösungen:

\_\_\_\_\_

Lösungen (Näherungswerte):

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

3

Antwort: \_\_\_\_\_

- wie heute für den Betrag geteilt durch  $1 + \frac{p}{100}$ .

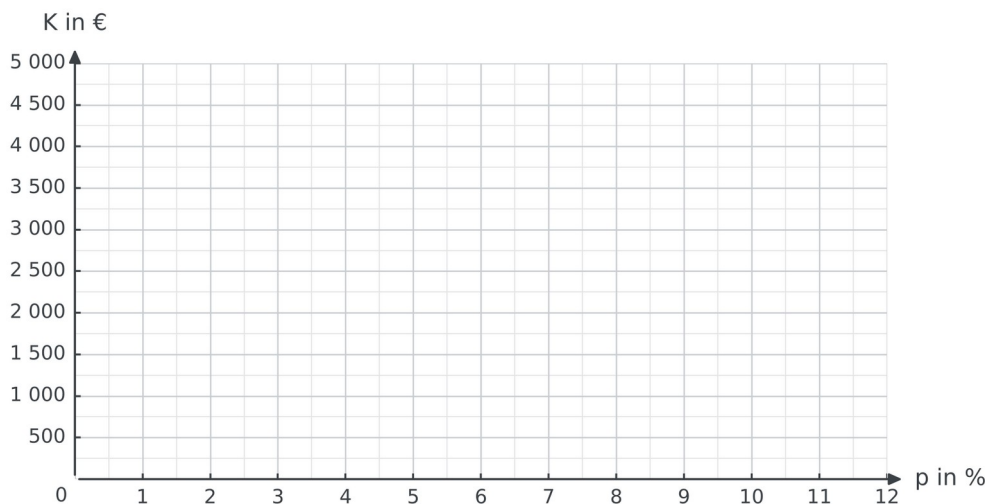
Stelle einen Term für die Kaufkraft  $K(p)$  von 5 000 € nach 15 Jahren auf.

$$K(p) = \underline{\hspace{10cm}}$$

Berechne die Kaufkraft für die Inflationsraten in der Tabelle (auf ganze Euro gerundet).

| p in % | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|--------|---|---|---|---|---|---|----|----|
| K in € |   |   |   |   |   |   |    |    |

Zeichne den Graphen von  $K$  in das Koordinatensystem.



Lies ab, bei welcher Inflationsrate die Kaufkraft nach 15 Jahren nur noch halb so groß ist.

Inflationsrate:

## Lösung: Mathearbeit Klasse 10

Insgesamt sind 30 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

| Note 1   | Note 2     | Note 3       | Note 4   | Note 5    | Note 6   |
|----------|------------|--------------|----------|-----------|----------|
| 30–27 P. | 26,5–24 P. | 23,5–19,5 P. | 19–15 P. | 14,5–9 P. | 8,5–0 P. |

### 1 Vereinfache so weit wie möglich.

Alle Variablen stehen für positive reelle Zahlen,  $n$  ist eine natürliche Zahl.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left( \sqrt[9]{x} \sqrt{6} \right)^{\sqrt{6}} \\ & = \left( x^{\frac{1}{9}} \right)^{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = x^{\frac{6}{9}} = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

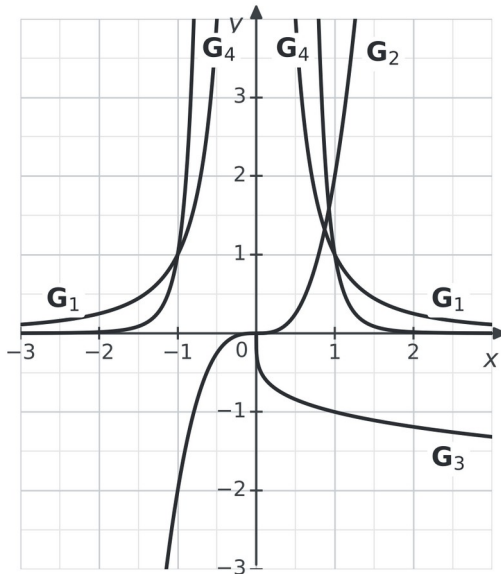
$$\begin{aligned} \text{b) } & \left( \frac{y}{\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{y}} - \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{y}} \right) \cdot y^{\frac{5}{6}} \\ & \frac{y}{\sqrt{y} \cdot \sqrt[3]{y}} = y^{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = y^{\frac{1}{6}}; \quad \sqrt[3]{8 \cdot \sqrt{y}} = 8^{\frac{1}{3}} \cdot \left( y^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} = 2 y^{\frac{1}{6}} \\ & = \left( y^{\frac{1}{6}} - 2 y^{\frac{1}{6}} \right) \cdot y^{\frac{5}{6}} = -y^{\frac{1}{6}} \cdot y^{\frac{5}{6}} = -y^{\frac{1}{6} + \frac{5}{6}} \\ & = -y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \left( \frac{4a^3}{9b} \right)^2 \cdot \left( \frac{3b}{2c^2} \right)^3 \cdot \left( \frac{2a^2}{3c^2} \right)^{-3} \\ & = \frac{16a^6}{81b^2} \cdot \frac{27b^3}{8c^6} \cdot \frac{27c^6}{8a^6} \\ & = \frac{16 \cdot 27 \cdot 27}{81 \cdot 8 \cdot 8} \cdot a^{6-6} \cdot b^{3-2} \cdot c^{6-6} \\ & = \frac{9b}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & \left( (-1)^{6n+1} - (-1)^{2n} \right)^3 \\ & 6n + 1 \text{ ist ungerade, } 2n \text{ ist gerade: } (-1)^{6n+1} = -1, \quad (-1)^{2n} = 1 \\ & (-1 - 1)^3 = (-2)^3 = -8 \end{aligned}$$

## 2 Potenzfunktionen

- a) Ordne jedem der Graphen G1 bis G4 den passenden Funktionsterm zu. Trage den Buchstaben in die Tabelle ein. Sechs Terme bleiben übrig.



Funktionsterme f(x):

|                      |                     |
|----------------------|---------------------|
| <b>A</b> $x^3$       | <b>F</b> $x^{-3}$   |
| <b>B</b> $x^{-6}$    | <b>G</b> $x^{-2}$   |
| <b>C</b> $-2x^{1/4}$ | <b>H</b> $x^6$      |
| <b>D</b> $x^{1/4}$   | <b>I</b> $-x^{1/4}$ |
| <b>E</b> $2x^3$      | <b>J</b> $x^{-5}$   |

Zuordnung:

| <b>G<sub>1</sub></b> | <b>G<sub>2</sub></b> | <b>G<sub>3</sub></b> | <b>G<sub>4</sub></b> |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| <b>G</b>             | <b>E</b>             | <b>I</b>             | <b>B</b>             |

**G<sub>1</sub>:**  $f(x) = x^{-2}$  achsensymmetrisch, für  $x > 1$  flacher als G4

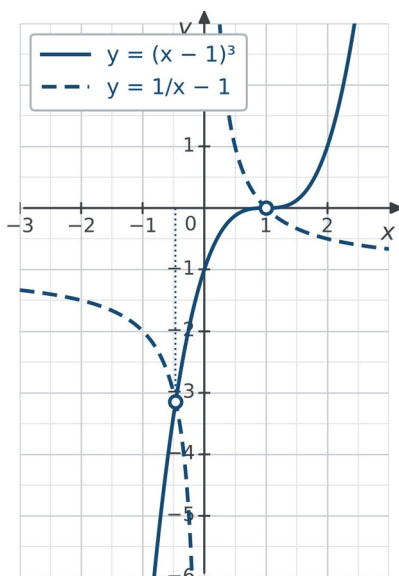
**G<sub>2</sub>:**  $f(x) = 2x^3$  punktsymmetrisch, geht durch P(1 | 2)

**G<sub>3</sub>:**  $f(x) = -x^{1/4}$  nur für  $x \geq 0$  definiert, geht durch P(1 | -1)

**G<sub>4</sub>:**  $f(x) = x^{-6}$  achsensymmetrisch, fällt für  $x > 1$  schneller als G1

- b) Ermittle grafisch, wie viele Lösungen die Gleichung  $(x-1)^3 = \frac{1}{x} - 1$  hat.

Zeichne dazu beide Seiten als Graphen in das Koordinatensystem und gib die Lösungen näherungsweise an.



Linke Seite:  $(x-1)^3$  (Graph von  $x^3$  um 1 nach rechts verschoben)

Rechte Seite:  $\frac{1}{x} - 1$  (Hyperbel  $\frac{1}{x}$  um 1 nach unten verschoben)

Die Graphen schneiden sich in zwei Punkten.

**Die Gleichung hat 2 Lösungen:**

**$x = 1$  und  $x \approx -0,5$**

genauer:  $x \approx -0,47$

Probe für  $x = 1$ :  $0^3 = 0 = \frac{1}{1} - 1$

### 3 Geldanlage und Kaufkraft

- a) Frau Berger hat vor 12 Jahren 4 000 € zu einem festen Zinssatz angelegt. Die Zinsen wurden jedes Jahr mitverzinst. Heute beträgt ihr Guthaben 8 048,79 €. Berechne den jährlichen Zinssatz.

$$4000 \cdot q^{12} = 8048,79$$

$$q^{12} = \frac{8048,79}{4000} \approx 2,01220$$

$$q = (2,01220)^{\frac{1}{12}} \approx 1,06$$

**Der jährliche Zinssatz beträgt 6 %.**

- b) Durch Inflation verliert Geld an Kaufkraft: Bei einer jährlichen Inflationsrate von  $p$  % kann man sich nach einem Jahr für einen Betrag nur noch so viel kaufen wie heute für den Betrag geteilt durch  $1 + \frac{p}{100}$ .

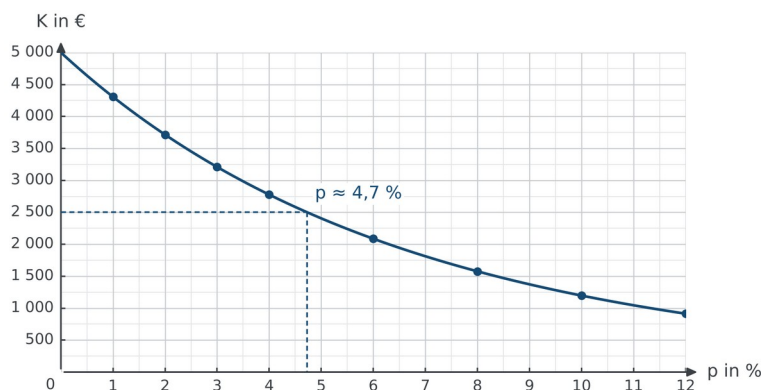
Stelle einen Term für die Kaufkraft  $K(p)$  von 5 000 € nach 15 Jahren auf.

$$K(p) = \frac{5000 \text{ €}}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^{15}}$$

Berechne die Kaufkraft für die Inflationsraten in der Tabelle (auf ganze Euro gerundet).

| p in % | 1     | 2     | 3     | 4     | 6     | 8     | 10    | 12  |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| K in € | 4 307 | 3 715 | 3 209 | 2 776 | 2 086 | 1 576 | 1 197 | 913 |

Zeichne den Graphen von  $K$  in das Koordinatensystem.



Lies ab, bei welcher Inflationsrate die Kaufkraft nach 15 Jahren nur noch halb so groß ist.

Inflationsrate:  **$p \approx 4,7 \%$  (dann ist  $K = 2\,500 \text{ €}$ )**

rechnerisch:  $(1 + p/100)^{15} = 2 \Rightarrow p = 100 \cdot (2^{1/15} - 1) \approx 4,73$