

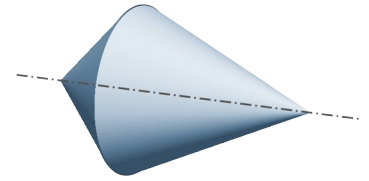
Klassenarbeit Mathematik Klasse 10

Thema: Logarithmen, Zinseszins, Sinus- und Kosinussatz, Rotationskörper

Name: _____ Datum: _____

Punkte: _____ / 48 Note: _____

Unterschrift: _____



Viel Erfolg!

Algebra

- 1 Bestimme jeweils alle Basen x ($x \in \mathbb{R}^+$), für die die Gleichung gilt.

a) $\log_x 7 = 2$

b) $\log_x 1 = 0$

c) $\log_x \left(\frac{4}{5} \right)^{-1} = 0,5$

___ / 3

- 2 Berechne ohne Taschenrechner. Gib alle Rechenschritte an.

$$\log_{\sqrt{3}} 243$$

____/2

- 3 Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfache.

$$3 \cdot \log_a (u v^2) - 2 \cdot \log_a \frac{u}{v} - \log_a v$$

/ 3 |

4 Zerlege in eine Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen.

$$\log_a \frac{3r^4\sqrt{s}}{s^3\sqrt{3}}$$

____ / 3

5 Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung ($G = \mathbb{R}$).

$$2 \cdot \log_3 (x + 1) - \log_3 x = \log_3 (9x + 4)$$

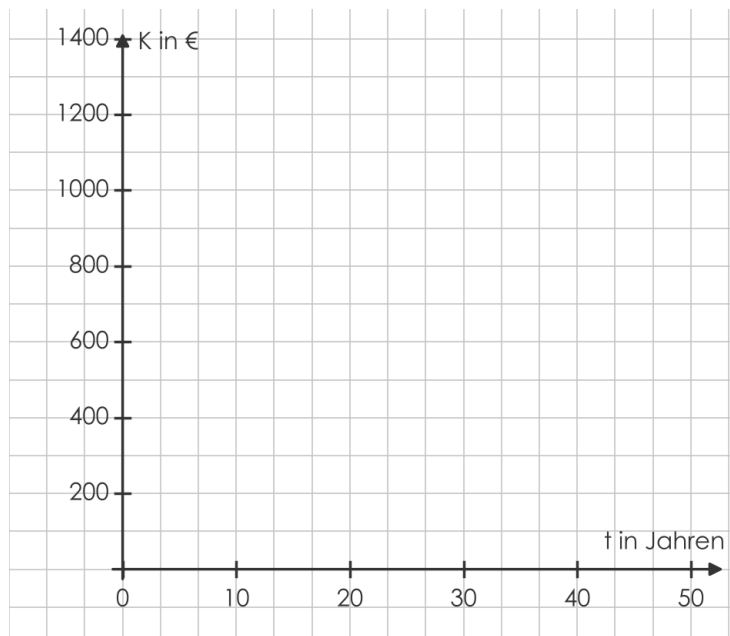
____ / 5

6 Zinseszins

Eine Sparerin legt im Jahr 2005 einen Betrag von 250,00 € zu einem festen Zinssatz von 3,5 % pro Jahr auf unbestimmte Zeit an. Die Zinsen werden jährlich dem Guthaben gutgeschrieben und mitverzinst.

a) Stelle die Funktionsgleichung für das Kapital $K(t)$ nach t Jahren auf. Lege eine Wertetabelle an ($0 \leq t \leq 50$, Schrittweite 10 Jahre) und zeichne den Graphen in das Koordinatensystem.

t in Jahren	K(t) in €
0	
10	
20	
30	
40	
50	



- b)** Berechne, über welches Kapital die Sparerin im Jahr 2050 verfügen kann.

- c)** Berechne, nach wie vielen Jahren sich das Anfangskapital verdoppelt hat.

- d)** Berechne den Zinssatz, bei dem sich das Kapital nach 40 Jahren verhundertfacht hätte.

____ / 8

Geometrie

7 Kräfte

Zwei Schlepperboote ziehen ein Containerschiff in den Hafen. Das erste Boot zieht mit einer Kraft von 150 kN, das zweite mit 250 kN. Die beiden Zugseile schließen einen Winkel von 50° ein.

Berechne Betrag und Richtung der resultierenden Kraft, mit der das Schiff gezogen wird. Gib als Richtung den Winkel zwischen der resultierenden Kraft und einer der beiden Zugkräfte an. Fertige dazu eine Skizze an.

16

8

Dreieck und Rotationskörper

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = BC = 7 \text{ cm}$,
 $b = AC = 5 \text{ cm}$ und $c = AB = 8 \text{ cm}$.

- a)** Berechne die Größen der drei Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks. Begründe, ob es eine zweite Lösung geben kann.



- b)** Das Dreieck ABC rotiert um die Gerade $g = AB$.

- b₁)** Fertige eine übersichtliche Skizze des entstehenden Rotationskörpers an.



- b₂)** Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers.
Verwende dafür $\alpha = 60^\circ$ und $\beta = 38,2^\circ$.



Lösung: Klassenarbeit Mathematik Klasse 10

Insgesamt sind 48 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

Notenschlüssel (Vorschlag)

Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
48–43,5 P.	43–38,5 P.	38–31,5 P.	31–24 P.	23,5–14,5 P.	14–0 P.

Algebra

① Bestimme jeweils alle Basen x ($x \in \mathbb{R}^+$), für die die Gleichung gilt.

a) $\log_x 7 = 2$

b) $\log_x 1 = 0$

c) $\log_x \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = 0,5$

a) $x^2 = 7 \Rightarrow x = \sqrt{7}$ (wegen $x > 0$)

b) $x^0 = 1$ gilt für jede zulässige Basis $\Rightarrow L = \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

c) $x^{0,5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$

3 / 3

② Berechne ohne Taschenrechner. Gib alle Rechenschritte an.

$\log_{\sqrt{3}} 243$

$243 = 3^5 = (\sqrt{3})^{10} \Rightarrow \log_{\sqrt{3}} 243 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{10} = 10$

2 / 2

③ Fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen und vereinfache.

$3 \cdot \log_a (u v^2) - 2 \cdot \log_a \frac{u}{v} - \log_a v$

$= \log_a (u^3 v^6) - \log_a \frac{u^2}{v^2} - \log_a v = \log_a \frac{u^3 v^6 \cdot v^2}{u^2 \cdot v} = \log_a (u v^7)$

3 / 3

④ Zerlege in eine Summe bzw. Differenz einzelner Logarithmen.

$\log_a \frac{3r^4 \sqrt{s}}{s^3 \sqrt{3}}$

$= \log_a (3r^4 \sqrt{s}) - \log_a (s^3 \sqrt{3})$

$= \log_a 3 + 4 \log_a r + \frac{1}{2} \log_a s - 3 \log_a s - \frac{1}{2} \log_a 3$

$= \frac{1}{2} \log_a 3 + 4 \log_a r - \frac{5}{2} \log_a s$

3 / 3

5 Bestimme die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Gleichung ($G = \mathbb{R}$).

$$2 \cdot \log_3 (x + 1) - \log_3 x = \log_3 (9x + 4)$$

Bedingungen: $x + 1 > 0$, $x > 0$ und $9x + 4 > 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^+$

$$\log_3 \frac{(x + 1)^2}{x} = \log_3 (9x + 4) \Rightarrow \frac{x^2 + 2x + 1}{x} = 9x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 9x^2 + 4x \Rightarrow 8x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} = \frac{-2 \pm 6}{16}$$

$$x_1 = \frac{1}{4} \in D; \quad x_2 = -\frac{1}{2} \notin D \Rightarrow L = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$$

5 / 5

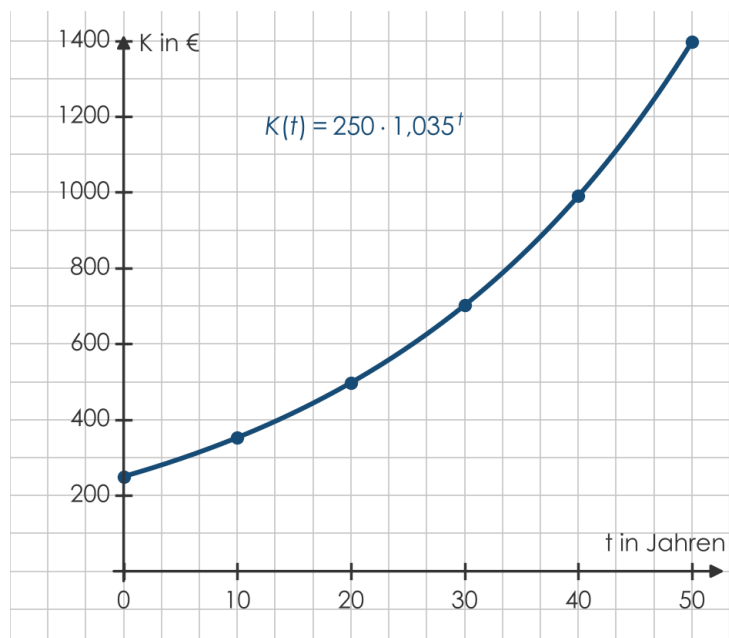
6 Zinseszins

Eine Sparerin legt im Jahr 2005 einen Betrag von 250,00 € zu einem festen Zinssatz von 3,5 % pro Jahr auf unbestimmte Zeit an. Die Zinsen werden jährlich dem Guthaben gutgeschrieben und mitverzinst.

- a) Stelle die Funktionsgleichung für das Kapital $K(t)$ nach t Jahren auf. Lege eine Wertetabelle an ($0 \leq t \leq 50$, Schrittweite 10 Jahre) und zeichne den Graphen in das Koordinatensystem.

$$K(t) = 250 \cdot 1,035^t \quad (t \text{ in Jahren ab 2005, } K \text{ in €})$$

t in Jahren	K(t) in €
0	250,00
10	352,65
20	497,45
30	701,70
40	989,81
50	1396,23



4 / 4

- b) Berechne, über welches Kapital die Sparerin im Jahr 2050 verfügen kann.

$$t = 2050 - 2005 = 45 : K(45) = 250 \cdot 1,035^{45} \approx 1175,59 \text{ €}$$

- c) Berechne, nach wie vielen Jahren sich das Anfangskapital verdoppelt hat.

$$500 = 250 \cdot 1,035^t \Rightarrow 1,035^t = 2 \Rightarrow t = \frac{\lg 2}{\lg 1,035} \approx 20,15$$

Das Kapital hat sich nach gut 20 Jahren verdoppelt (≈ 20 Jahre 2 Monate); da die Zinsen jährlich gutgeschrieben werden, ist es nach 21 Jahren erstmals mehr als doppelt so groß.

- d) Berechne den Zinssatz, bei dem sich das Kapital nach 40 Jahren verundertfacht hätte.

$$25000 = 250 \cdot q^{40} \Rightarrow q^{40} = 100 \Rightarrow q = 100^{1/40} \approx 1,1220$$

Der Zinssatz müsste etwa 12,2 % betragen.

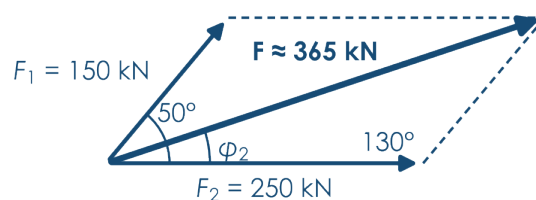
8 / 8

Geometrie

7 Kräfte

Zwei Schlepperboote ziehen ein Containerschiff in den Hafen. Das erste Boot zieht mit einer Kraft von 150 kN, das zweite mit 250 kN. Die beiden Zugseile schließen einen Winkel von 50° ein.

Berechne Betrag und Richtung der resultierenden Kraft, mit der das Schiff gezogen wird. Gib als Richtung den Winkel zwischen der resultierenden Kraft und einer der beiden Zugkräfte an. Fertige dazu eine Skizze an.



Musterskizze: Kräfteparallelogramm; im Teildreieck liegt der resultierenden Kraft der Winkel $180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ gegenüber.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cdot \cos 130^\circ$$

$$= 150^2 + 250^2 + 2 \cdot 150 \cdot 250 \cdot \cos 50^\circ \approx 133209 \Rightarrow F \approx 365,0 \text{ kN}$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{F^2 + F_2^2 - F_1^2}{2 \cdot F \cdot F_2} \approx 0,9491 \Rightarrow \varphi_2 \approx 18,4^\circ$$

$$\varphi_1 = 50^\circ - 18,4^\circ = 31,6^\circ \quad (\text{Winkel zwischen } F \text{ und } F_1)$$

Das Schiff wird mit etwa 365 kN gezogen; die Ersatzkraft weicht um etwa $18,4^\circ$ von der Richtung der größeren Kraft F_2 ab.

6 / 6

8 Dreieck und Rotationskörper

Gegeben ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $a = BC = 7 \text{ cm}$, $b = AC = 5 \text{ cm}$ und $c = AB = 8 \text{ cm}$.

- a) Berechne die Größen der drei Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks. Begründe, ob es eine zweite Lösung geben kann.

Es gibt nur eine Lösung: Drei Seiten legen ein Dreieck eindeutig fest (Kongruenzsatz SSS).

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{40}{80} = 0,5 \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 60^\circ}{7} \approx 0,6186 \Rightarrow \beta \approx 38,2^\circ$$

(β ist spitz, weil $b < a$ und damit $\beta < \alpha$ gilt; $141,8^\circ$ scheidet aus.)

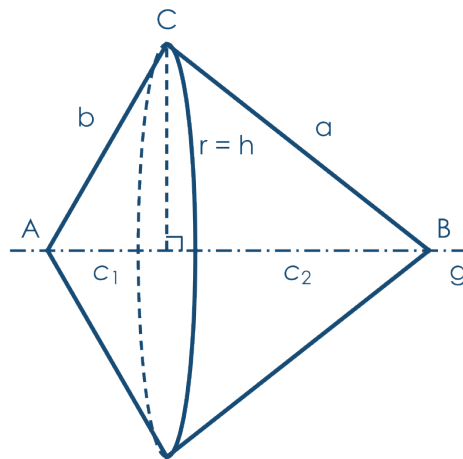
$$\gamma = 180^\circ - 60^\circ - 38,2^\circ = 81,8^\circ$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 60^\circ \approx 17,32 \text{ cm}^2$$

- b) Das Dreieck ABC rotiert um die Gerade $g = AB$.

- b₁) Fertige eine übersichtliche Skizze des entstehenden Rotationskörpers an.

Musterskizze: Doppelkegel aus zwei Kegeln mit gemeinsamer Grundfläche; Radius r = Höhe h des Dreiecks auf c , Spitzen in A und B.



- b₂) Berechne Volumen und Oberfläche des Rotationskörpers. Verwende dafür $\alpha = 60^\circ$ und $\beta = 38,2^\circ$.

$$r = h = b \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \sin 60^\circ \approx 4,33 \text{ cm}$$

$$(\text{Kontrolle: } h = a \cdot \sin \beta = 7 \cdot \sin 38,2^\circ \approx 4,33 \text{ cm})$$

$$V = \frac{1}{3} \pi h^2 c_1 + \frac{1}{3} \pi h^2 c_2 = \frac{1}{3} \pi h^2 c \approx \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4,33^2 \cdot 8 \approx 157,1 \text{ cm}^3$$

$$O = \pi h \cdot b + \pi h \cdot a = \pi h (a + b) \approx \pi \cdot 4,33 \cdot 12 \approx 163,2 \text{ cm}^2$$