

Klassenarbeit Mathematik Klasse 10

Thema: Wachstum, Exponentialfunktionen, Logarithmen, Vierfeldertafel

Name: _____ Datum: _____

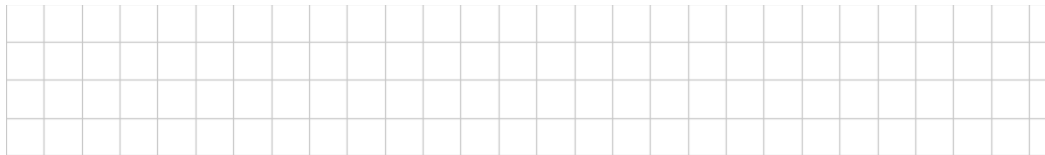
Punkte: _____ / 42 Note: _____ Unterschrift: _____

Hinweis: Alle Rechenwege müssen nachvollziehbar sein.

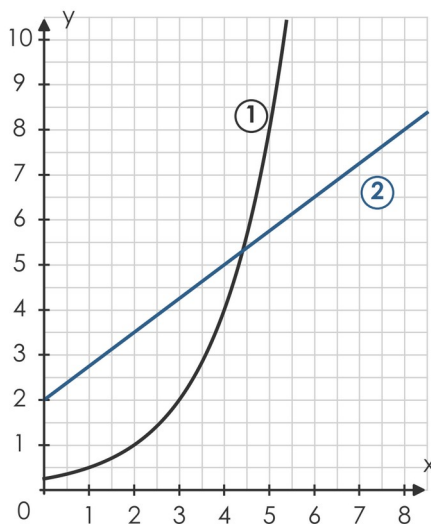
Viel Erfolg!

1 Lineares und exponentielles Wachstum

- a) In einem Waldstück stehen zurzeit rund 12 000 Festmeter Holz (1 Festmeter entspricht 1 m³ fester Holzmasse ohne Zwischenräume). Der Bestand wächst jedes Jahr um 3,5 %. Gib an, welche Art von Wachstum vorliegt, stelle die Funktionsgleichung auf und berechne den Holzbestand nach 20 Jahren (auf ganze Festmeter gerundet).



- b) Im Diagramm sind zwei Wachstumsvorgänge dargestellt. Entscheide, welcher Graph lineares und welcher exponentielles Wachstum zeigt, und gib zu jedem Graphen die Funktionsgleichung an.



Graph 1:

Wachstum: _____

Gleichung: _____

Graph 2:

Wachstum: _____

Gleichung: _____

- c) Vervollständige die Wertetabelle so, dass exponentielles Wachstum vorliegt, und gib die Funktionsgleichung an.

x		0	2	3	
y	0,75		48	192	6144

Funktionsgleichung: _____

2

Gegeben sind die Funktionen f , g und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = -(\frac{1}{3})^x$ und $h(x) = -3^x$.

- a)** Beschreibe, wie die Graphen von g und h jeweils aus dem Graphen von f entstehen.

G_g: _____

 $G_h:$

- b)** Gib die Wertemenge der Funktion f an.

$W_f =$ _____

____ / 3

3

- a) Vereinfache so weit wie möglich und fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

$$\log_a b^3 + \log_a (c : b) - \log_a \sqrt{c}$$

- b)** Löse die Gleichung ohne Taschenrechner. Schreibe alle Rechenschritte auf.

$$1 + \lg x - \lg 3 = 2 \cdot \lg 6 - \lg 9$$

____/7

4

Löse die Gleichungen mit einer jeweils geeigneten Lösungsstrategie.

a) $3^x + 3^{2-x} = 10$

b) $2 \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 6^{x+2}$ Runde das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

____ / 10

5

Ein Gymnasium bietet allen 150 Schülerinnen und Schülern der 10. Klassen einen Austausch mit einer Partnerschule in Lyon (Frankreich) an. Beworben haben sich 70 % aller Mädchen und 30 % aller Jungen der Jahrgangsstufe (erfundene Zahlen).

M: Mädchen, J: Junge, B: hat sich beworben, $\bar{B}$: hat sich nicht beworben

a) Vervollständige die Vierfeldertafel.

	B	$\bar{B}$	Summe
M	63		
J			
Summe			150

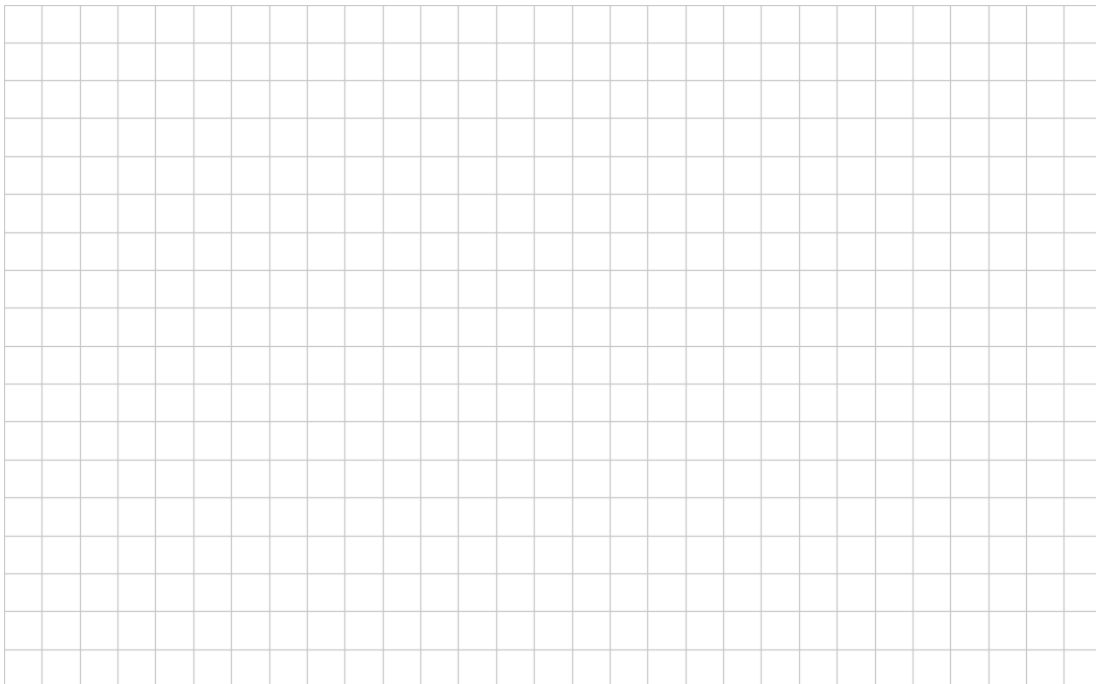
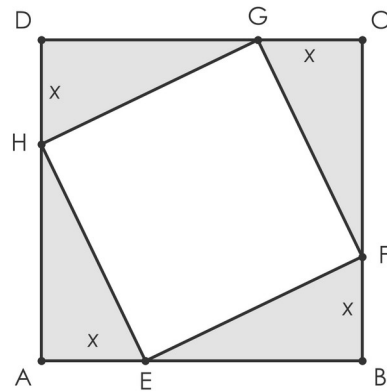
b) Gib an, wie viel Prozent aller Schülerinnen und Schüler der 10. Klassen sich beworben haben.

____ / 5

6 Grundwissen: Extremwertproblem

Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 8 cm. Von jeder Ecke aus wird gegen den Uhrzeigersinn eine Strecke der Länge x abgetragen ($AE = BF = CG = DH = x$). Die Punkte E, F, G und H bilden wieder ein Quadrat.

Stelle einen Term für den Flächeninhalt $A(x)$ des Quadrats EFGH auf. Berechne, für welches x der Flächeninhalt am kleinsten ist, und gib diesen kleinsten Flächeninhalt an.



Lösung: Klassenarbeit Mathematik Klasse 10

Insgesamt sind 42 Punkte erreichbar, halbe Punkte sind möglich.

Notenschlüssel (Vorschlag)

Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
42–38 P.	37,5–34 P.	33,5–27,5 P.	27–21 P.	20,5–13 P.	12,5–0 P.

1 Lineares und exponentielles Wachstum

- a) In einem Waldstück stehen zurzeit rund 12 000 Festmeter Holz (1 Festmeter entspricht 1 m³ fester Holzmasse ohne Zwischenräume). Der Bestand wächst jedes Jahr um 3,5 %. Gib an, welche Art von Wachstum vorliegt, stelle die Funktionsgleichung auf und berechne den Holzbestand nach 20 Jahren (auf ganze Festmeter gerundet).

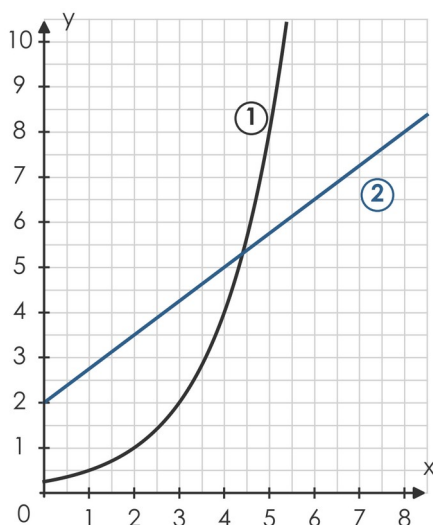
Exponentielles Wachstum (Wachstumsfaktor $q = 1 + 0,035 = 1,035$).

$$B(t) = 12\,000 \cdot 1,035^t \quad (t \text{ in Jahren, } B \text{ in Festmetern})$$

$$B(20) = 12\,000 \cdot 1,035^{20} \approx 23\,877$$

Nach 20 Jahren stehen etwa 23 877 Festmeter Holz im Wald.

- b) Im Diagramm sind zwei Wachstumsvorgänge dargestellt. Entscheide, welcher Graph lineares und welcher exponentielles Wachstum zeigt, und gib zu jedem Graphen die Funktionsgleichung an.



Graph 1:

Wachstum: exponentiell

Gleichung: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x = 2^{x-2}$

Graph 2:

Wachstum: linear

Gleichung: $g(x) = \frac{3}{4}x + 2$

- c) Vervollständige die Wertetabelle so, dass exponentielles Wachstum vorliegt, und gib die Funktionsgleichung an.

x	-1	0	2	3	5,5
y	0,75	3	48	192	6144

Funktionsgleichung: $f(x) = 3 \cdot 4^x$

$$192 : 48 = 4 \text{ (Faktor je Einheit); } a = 48 : 4^2 = 3; 0,75 = 3 \cdot 4^{-1};$$

$$3 \cdot 4^x = 6144 \Rightarrow 4^x = 2048 = 2^{11} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{11} \Rightarrow x = 5,5$$

2 Exponentialfunktionen

Gegeben sind die Funktionen f , g und h mit $f(x) = 3^x$, $g(x) = -(1/3)^x$ und $h(x) = -3^x$.

- a) Beschreibe, wie die Graphen von g und h jeweils aus dem Graphen von f entstehen.

G_g : Spiegelung an der x-Achse und an der y-Achse,

also Punktspiegelung am Ursprung

G_h : Spiegelung an der x-Achse

- b) Gib die Wertemenge der Funktion f an.

$W_f =$ $]0; \infty[= \mathbb{R}^+$

3 / 3

3 Rechnen mit Logarithmen

- a) Vereinfache so weit wie möglich und fasse zu einem einzigen Logarithmus zusammen:

$$\begin{aligned} & \log_a b^3 + \log_a (c : b) - \log_a \sqrt{c} \\ & \log_a b^3 + \log_a (c : b) - \log_a \sqrt{c} \\ & = 3 \log_a b + \log_a c - \log_a b - \frac{1}{2} \log_a c \\ & = 2 \log_a b + \frac{1}{2} \log_a c \\ & = \log_a (b^2 \cdot \sqrt{c}) \end{aligned}$$

- b) Löse die Gleichung ohne Taschenrechner. Schreibe alle Rechenschritte auf.

$$\begin{aligned} 1 + \lg x - \lg 3 &= 2 \cdot \lg 6 - \lg 9 \\ \lg x &= 2 \lg 6 - \lg 9 + \lg 3 - 1 \\ \lg x &= \lg 36 - \lg 9 + \lg 3 - 1 = \lg (36 : 9 \cdot 3) - 1 = \lg 12 - \lg 10 \\ \lg x &= \lg (12 : 10) = \lg 1,2 \\ x &= 1,2 \quad (\text{Probe: } 1 + \lg 1,2 - \lg 3 = \lg 4 = \lg 36 - \lg 9 \checkmark) \end{aligned}$$

7 / 7

4 Exponentialgleichungen

Löse die Gleichungen mit einer jeweils geeigneten Lösungsstrategie.

a) $3^x + 3^{2-x} = 10$

$$3^x + 3^2 \cdot 3^{-x} = 10 \Leftrightarrow 3^x + 9 : 3^x = 10$$

Substitution $z = 3^x$ ($z > 0$): $z + 9/z = 10 \quad | \cdot z$

$$z^2 - 10z + 9 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{(25 - 9)} = 5 \pm 4$$

$$z_1 = 9, z_2 = 1$$

$$3^x = 9 \Rightarrow x_1 = 2; \quad 3^x = 1 \Rightarrow x_2 = 0 \quad L = \{0; 2\}$$

b) $2 \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 6^{x+2}$ Runde das Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

$$\lg(2 \cdot 5^{2x}) = \lg(3 \cdot 6^{x+2})$$

$$\lg 2 + 2x \cdot \lg 5 = \lg 3 + (x + 2) \cdot \lg 6$$

$$2x \cdot \lg 5 - x \cdot \lg 6 = \lg 3 + 2 \lg 6 - \lg 2$$

$$x \cdot (\lg 25 - \lg 6) = \lg(3 \cdot 36 : 2) = \lg 54$$

$$x = \lg 54 : \lg(25/6) \approx 1,7324 : 0,6198 \approx 2,80$$

10 / 10

5 Vierfeldertafel

Ein Gymnasium bietet allen 150 Schülerinnen und Schülern der 10. Klassen einen Austausch mit einer Partnerschule in Lyon (Frankreich) an. Beworben haben sich 70 % aller Mädchen und 30 % aller Jungen der Jahrgangsstufe (erfundene Zahlen).

M: Mädchen, J: Junge, B: hat sich beworben, $\bar{B}$: hat sich nicht beworben

a) Vervollständige die Vierfeldertafel.

	B	$\bar{B}$	Summe
M	63	27	90
J	18	42	60
Summe	81	69	150

Mädchen: $63 = 70\% \text{ von } M \Rightarrow M = 63 : 0,7 = 90$; Jungen: $150 - 90 = 60$; $J \cap B = 30\% \text{ von } 60 = 18$

b) Gib an, wie viel Prozent aller Schülerinnen und Schüler der 10. Klassen sich beworben haben.

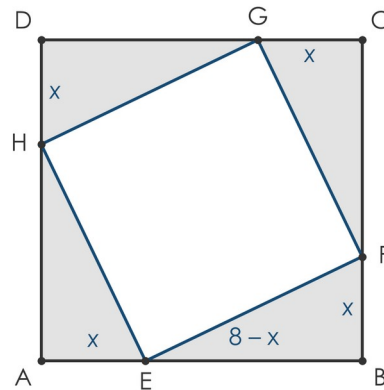
$$63 + 18 = 81 \text{ von } 150 \text{ haben sich beworben: } 81 : 150 = 0,54 = 54\%$$

5 / 5

6 Grundwissen: Extremwertproblem

Ein Quadrat ABCD hat die Seitenlänge 8 cm. Von jeder Ecke aus wird gegen den Uhrzeigersinn eine Strecke der Länge x abgetragen ($AE = BF = CG = DH = x$). Die Punkte E, F, G und H bilden wieder ein Quadrat.

Stelle einen Term für den Flächeninhalt $A(x)$ des Quadrats EFGH auf. Berechne, für welches x der Flächeninhalt am kleinsten ist, und gib diesen kleinsten Flächeninhalt an.



Musterskizze

Seite EF nach Pythagoras im Dreieck EBF: $EF^2 = (8 - x)^2 + x^2$

$$A(x) = (8 - x)^2 + x^2 = 64 - 16x + x^2 + x^2 = 2x^2 - 16x + 64 \quad (0 < x < 8)$$

$$\text{Quadratische Ergänzung: } A(x) = 2(x^2 - 8x + 16) + 64 - 32 = 2(x - 4)^2 + 32$$

Scheitel $S(4 \mid 32)$: Der Flächeninhalt ist für $x = 4$ cm am kleinsten.

$A_{\min} = 32 \text{ cm}^2$ (genau die Hälfte des großen Quadrats, E, F, G, H sind Seitenmitten).