

Die Giebelseite eines 14,8 m breiten Gebäudes soll verbrettert werden. Die Dachsparren auf der einen Seite sind 7 m, auf der anderen Seite 11 m lang. Wie teuer wird das Material, wenn 15% für Verschnitt hinzugerechnet werden müssen und 1 m² Bretter 12,30 € kostet?

Berechne die Fläche eines Grundstücks, das die Form eines unregelmäßigen Vierecks hat: $a = 125$ m; $b = 140$ m; $c = 185$ m; $d = 65$ m und $\alpha = 72,5^\circ$.
Fertige eine Planfigur an.

In einem rechtwinkligen Dreieck sind eine Kathete 9 cm und die Hypotenuse 14 cm lang. In einem stumpfwinkligen Dreieck sind die Seite $a = 10$ cm, die Seite $b = 15$ cm und die Seite $c = 21$ cm lang.

- Berechne jeweils den Flächeninhalt der beiden Dreiecke.
- Um wie viel Prozent ist die eine Fläche kleiner als die andere?

In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $a = 30$ cm, $b = 40$ cm, $c = 50$ cm.

- Berechne die Höhe $h_c = h_1$ ohne trigonometrische Hilfsmittel.
- Berechne die Höhe $h_c = h_1$ mit trigonometrischen Hilfsmitteln.

Das Ausgangsdreieck wird durch h_1 in ein größeres und ein kleineres rechtwinkliges Dreieck geteilt.

In dem größeren davon teilt wiederum die Höhe h_2 das Dreieck in ein größeres und ein kleineres rechtwinkliges Dreieck. In dem größeren davon teilt wiederum h_3 usw.

- Zeichne die Höhen h_2 und h_3 in die Planfigur ein!
- Die Höhe h_1 wird auf h_2 , h_2 auf h_3 , h_3 auf h_4 usw. verkürzt. Berechne den konstanten Verkürzungsfaktor k und die Länge von h_{13} .

Gegeben sei ein Parallelogramm mit $a = 6,2$ cm, $b = 4,3$ cm und $e = 8,1$ cm.

- Zeichne eine Planfigur.
- Berechne die Winkel des Parallelogramms.
- Berechne die Länge der fehlenden Diagonalen.
- Berechne den Flächeninhalt.
- Berechne $\angle ASB$. S sei der Diagonalschnittpunkt.

Von einem Parallelogramm sind gegeben:

$a = 6,2$ cm; $b = 4,3$ cm; $e = 8,1$ cm

Berechne die fehlende Diagonale, die Winkel und den Flächeninhalt.

Von dem allgemeinen Trapez ABCD sind folgende Stücke bekannt:

$a = 8,5$ cm; $\alpha = 72,4^\circ$; $\beta = 55^\circ$; $d = 5,3$ cm

- Fertige eine Zeichnung an.
- Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel sowie die Diagonalen und den Flächeninhalt.

Die Diagonalen e und f eines Parallelogramms ($e = 65$ cm; $f = 52$ cm) schneiden sich unter einem Winkel von 123° . Dieser Winkel liegt der Seite a gegenüber.

- Zeichne das Parallelogramm im Maßstab $1 : 10$.
- Berechne die Seiten a und b , die beiden Innenwinkel α und β , die Höhe h_a und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Drei Kreise mit den Radien 3 cm, 4 cm und 5 cm berühren sich.

- Fertige eine genaue Zeichnung an.
- Welchen Flächeninhalt hat das von den drei Kreislinien begrenzte „Kreisdreieck“?

Gegeben sind drei Kreise mit den Radien $r_1 = 3,2$ cm, $r_2 = 2,3$ cm und $r_3 = 1,8$ cm. Jeder Kreis berührt die beiden anderen von außen. Die Mittelpunkte bilden ein Dreieck.

- Zeichne eine Planfigur.
- Berechne die Innenwinkel des Dreiecks.
- Wie groß ist sein Flächeninhalt?
- Berechne den Anteil der Kreisfläche, die nicht im Dreieck liegt.

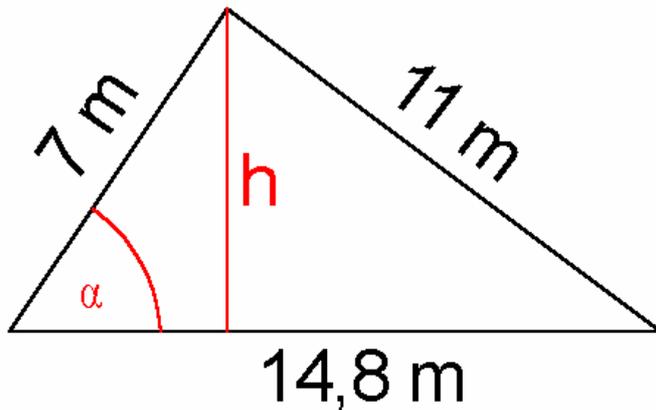
Ein Grundstück hat die Form eines Parallelogramms. Die beiden Seiten sind 49 m und 27 m lang, die Diagonale e beträgt 60 m.

- Unter welchen Winkeln stehen die Seiten zueinander?
- Wie hoch liegt der Grundstückspreis, wenn für 1 m² 270 € veranschlagt werden?

Berechne die fehlenden Winkel und die Diagonale f in einem Viereck, wenn $\overline{AB} = a = 856$ m; $\overline{BC} = b = 735$ m; $\overline{CD} = c = 1000$ m; $\overline{DA} = d = 917$ m; $\overline{BD} = f = 796$ m.

Die Giebelseite eines 14,8 m breiten Gebäudes soll verbrettert werden. Die Dachsparren auf der einen Seite sind 7 m, auf der anderen Seite 11 m lang. Wie teuer wird das Material, wenn 15% für Verschnitt hinzugerechnet werden müssen und 1 m² Bretter 12,30 € kostet?

Lösung



Berechnung von α :

$$11^2 = 7^2 + 14,8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 14,8 \cdot \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{11^2 - 7^2 - 14,8^2}{(-2) \cdot 7 \cdot 14,8}$$

$$\alpha \approx 44,79^\circ$$

Berechnung der Fläche und der Kosten:

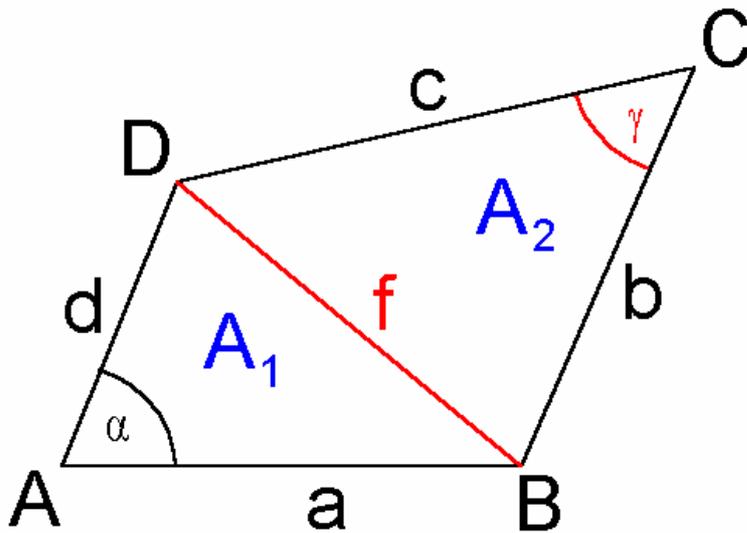
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 36,50 [\text{m}^2]$$

$$\text{Kosten} = A_{\Delta} \cdot 12,3 \cdot 1,15 = 516,20 [\text{€}]$$

Für das Material müssen 516,20 € ausgegeben werden.

Berechne die Fläche eines Grundstücks, das die Form eines unregelmäßigen Vierecks hat: $a = 125 \text{ m}$; $b = 140 \text{ m}$; $c = 185 \text{ m}$; $d = 65 \text{ m}$ und $\alpha = 72,5^\circ$.
 Fertige eine Planfigur an.

Lösung



Berechnung von f:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2a \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$f = 122,3 \text{ [m]}$$

Berechnung von γ :

$$\cos \gamma = \frac{b^2 + c^2 - f^2}{2bc}$$

$$\gamma = 41,38^\circ$$

Berechnung von A_1 und A_2 :

$$A_1 = \frac{a \cdot d \cdot \sin \alpha}{2} = 3874 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_2 = \frac{b \cdot c \cdot \sin \gamma}{2} = 8561 \text{ [m}^2\text{]}$$

$$A_{\text{ges}} = 12435 \text{ [m}^2\text{]}$$

In einem rechtwinkligen Dreieck sind eine Kathete 9 cm und die Hypotenuse 14 cm lang. In einem stumpfwinkligen Dreieck sind die Seite a = 10 cm, die Seite b = 15 cm und die Seite c = 21 cm lang.

c) Berechne jeweils den Flächeninhalt der beiden Dreiecke.

d) Um wie viel Prozent ist die eine Fläche kleiner als die andere?

Lösung:

Fläche des rechtwinkligen Dreiecks:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b = 10,7238 \text{ [cm]}$$

$$A_2 = \frac{a \cdot b}{2} \approx 48,3 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Fläche des stumpfwinkligen Dreiecks:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = 26,05^\circ$$

$$A_2 = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$A_2 \approx 69,2 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Berechnung des Prozentsatzes:

$$p\% = \frac{48,3}{69,2} \approx 0,698 \approx 69,8\%$$

Der Unterschied beträgt ca. 30,2%.

In einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben: $a = 30 \text{ cm}$, $b = 40 \text{ cm}$, $c = 50 \text{ cm}$.

e) Berechne die Höhe $h_c = h_1$ ohne trigonometrische Hilfsmittel.

f) Berechne die Höhe $h_c = h_1$ mit trigonometrischen Hilfsmitteln.

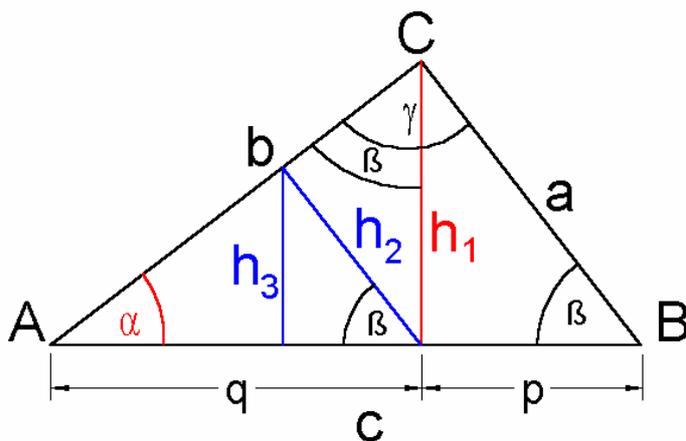
Das Ausgangsdreieck wird durch h_1 in ein größeres und ein kleineres rechtwinkliges Dreieck geteilt.

In dem größeren davon teilt wiederum die Höhe h_2 das Dreieck in ein größeres und ein kleineres rechtwinkliges Dreieck. In dem größeren davon teilt wiederum h_3 usw.

g) Zeichne die Höhen h_2 und h_3 in die Planfigur ein!

h) Die Höhe h_1 wird auf h_2 , h_2 auf h_3 , h_3 auf h_4 usw. verkürzt. Berechne den konstanten Verkürzungsfaktor k und die Länge von h_{13} .

Lösung:



Gegeben:

$a = 30 \text{ cm}$; $b = 40 \text{ cm}$; $c = 50 \text{ cm}$

a) Berechnung von p und h_1 :

$$a^2 = c \cdot p \qquad h_1^2 = a^2 - p^2$$

$$p = \frac{a^2}{c} = \frac{30^2}{50} = 18 \text{ [cm]} \qquad h_1 = 24 \text{ [cm]}$$

b) Berechnung mit Hilfe trig. Hilfsmittel:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \qquad \cos \alpha = \frac{h}{a}$$

$$\sin \alpha = \frac{30}{50} \qquad h_1 = a \cos \alpha$$

$$\alpha = 36,9^\circ \qquad h_1 = 30 \cdot \cos 36,9^\circ \approx 24 \text{ [cm]}$$

c) s. Planfigur

d) Berechnung des Verkürzungsfaktors:

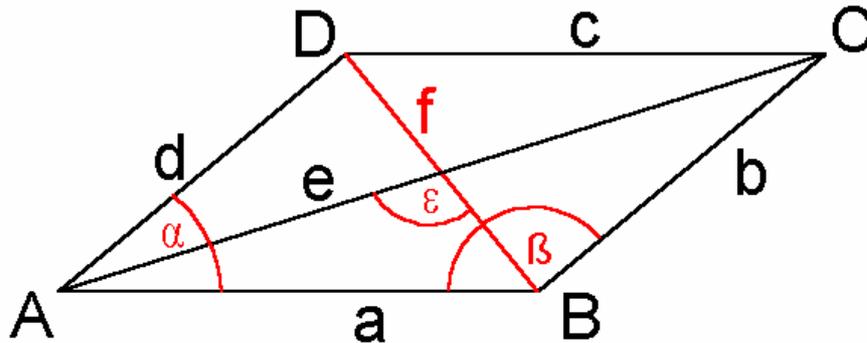
$$\sin \beta = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_3}{h_2} = \dots \qquad h_{13} = h_1 \cdot (\sin \beta)^{12} \approx 1,64 \text{ [cm]}$$

Verkürzungsfaktor $k = \sin \beta \approx 0,8$

Gegeben sei ein Parallelogramm mit $a = 6,2 \text{ cm}$, $b = 4,3 \text{ cm}$ und $e = 8,1 \text{ cm}$.

- f) Zeichne eine Planfigur.
- g) Berechne die Winkel des Parallelogramms.
- h) Berechne die Länge der fehlenden Diagonalen.
- i) Berechne den Flächeninhalt.
- j) Berechne $\angle ASB$. S sei der Diagonalschnittpunkt.

Lösung



$a = c = \overline{AB} = 6,2 \text{ cm}$; $b = d = \overline{BC} = 4,3 \text{ cm}$; $e = \overline{AC} = 8,1 \text{ cm}$

Berechnung von β :

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$
$$\beta = 99,37^\circ$$

Berechnung von α :

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 80,63^\circ$$

Berechnung von f :

$$f^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha$$
$$f = 6,95 \text{ [cm]}$$

Berechnung von A :

$$A = a \cdot b \cdot \sin \beta = 26,30 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Berechnung von ϵ :

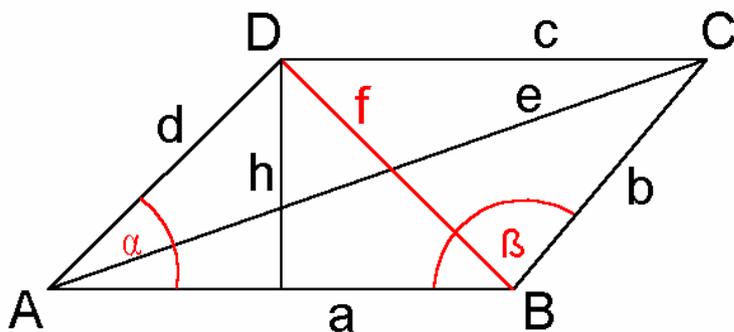
$$\cos \epsilon = \frac{\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - a^2}{2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2}}$$
$$\epsilon = 110,78^\circ$$

Von einem Parallelogramm sind gegeben:

$$a = 6,2 \text{ cm}; b = 4,3 \text{ cm}; e = 8,1 \text{ cm}$$

Berechne die fehlende Diagonale, die Winkel und den Flächeninhalt.

Lösung:



Berechnung von β :

$$8,1^2 = 6,2^2 + 4,3^2 - 2 \cdot 6,2 \cdot 4,3 \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{6,2^2 + 4,3^2 - 8,1^2}{2 \cdot 6,2 \cdot 4,3}$$

$$\beta = 99,37^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 80,63^\circ$$

Berechnung von f :

$$\overline{BD}^2 = 6,2^2 + 4,3^2 - 2 \cdot 6,2 \cdot 4,3 \cdot \cos \alpha$$

$$\overline{BD} = f = 6,95 \text{ [cm]}$$

Berechnung von h :

$$\sin \alpha = \frac{h}{4,3}$$

$$h = 4,24 \text{ [cm]}$$

Berechnung der Fläche:

$$A = a \cdot h$$

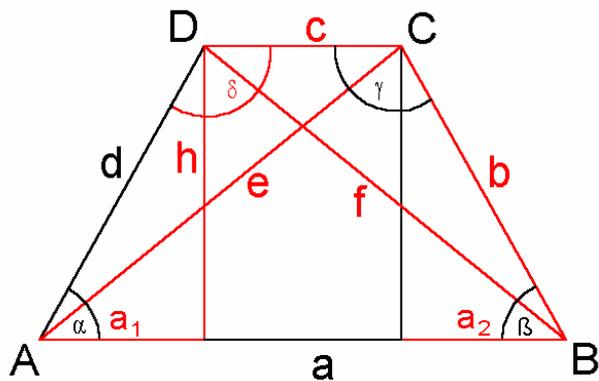
$$A = 26,288 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Von dem allgemeinen Trapez ABCD sind folgende Stücke bekannt:

$$a = 8,5 \text{ cm}; \alpha = 72,4^{\circ}; \beta = 55^{\circ}; d = 5,3 \text{ cm}$$

c) Fertige eine Zeichnung an.

d) Berechne alle fehlenden Seiten und Winkel sowie die Diagonalen und den Flächeninhalt.



Lösung

Gegeben:

$$a = 8,5 \text{ cm}; \alpha = 72,4^{\circ};$$

$$\beta = 55^{\circ}; d = 5,3 \text{ cm}$$

b) Berechnung der fehlenden Größen:

b1) Berechnung von f:

$$f^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos \alpha$$

$$f \approx 8,55 \text{ [cm]}$$

b2) Berechnung von h:

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$h = d \cdot \sin \alpha$$

$$h = 5,05 \text{ [cm]}$$

b3) Berechnung von b:

$$\sin \beta = \frac{h}{b}$$

$$b = \frac{h}{\sin \beta}$$

$$b \approx 6,17 \text{ [cm]}$$

b4) Berechnung von gamma:

$$\gamma = 180^{\circ} - \beta = 125^{\circ}$$

b5) Berechnung von delta:

$$\delta = 180^{\circ} - \alpha = 107,6^{\circ}$$

b6) Berechnung von e:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta$$

$$e \approx 7,08 \text{ [cm]}$$

b7) Berechnung von a1:

$$a_1^2 = d^2 - h^2$$

$$a_1 \approx 1,6 \text{ [cm]}$$

b8) Berechnung von a2:

$$\cos \beta = \frac{a_2}{b}$$

$$a_2 \approx 3,54 \text{ [cm]}$$

b9) Berechnung von c:

$$c = a - a_1 - a_2 = 3,37 \text{ [cm]}$$

b10) Berechnung von A:

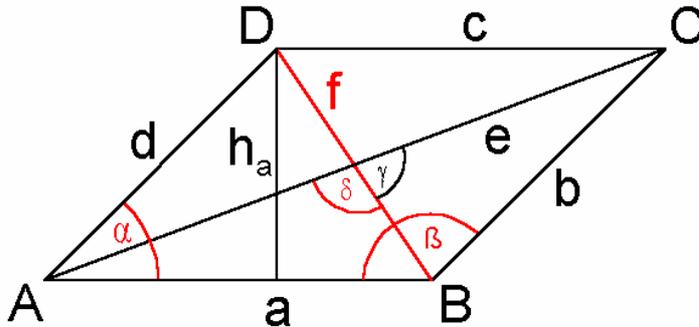
$$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = 29,96 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Die Diagonalen e und f eines Parallelogramms ($e = 65 \text{ cm}$; $f = 52 \text{ cm}$) schneiden sich unter einem Winkel von 123° . Dieser Winkel liegt der Seite a gegenüber.

c) Zeichne das Parallelogramm im Maßstab $1 : 10$.

d) Berechne die Seiten a und b , die beiden Innenwinkel α und β , die Höhe h_a und den Flächeninhalt des Parallelogramms.

Lösung



Gegeben: $e = 65 \text{ cm}$; $f = 52 \text{ cm}$; $\delta = 123^\circ$; $\gamma = 180^\circ - \delta = 57^\circ$

b1) Berechnung von b :

$$b^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos \gamma$$

$$b = 28,49 \text{ [cm]}$$

b2) Berechnung von a :

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{e}{2} \cdot \frac{f}{2} \cdot \cos \delta$$

$$a = 51,5 \text{ [cm]}$$

b3) Berechnung von β :

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$

$$\beta = 105^\circ$$

b4) Berechnung von α :

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 75^\circ$$

b5) Berechnung von h_a :

$$\sin \alpha = \frac{h_a}{b}$$

$$h_a = b \cdot \sin \alpha = 27,52 \text{ [cm]}$$

b6) Berechnung von A :

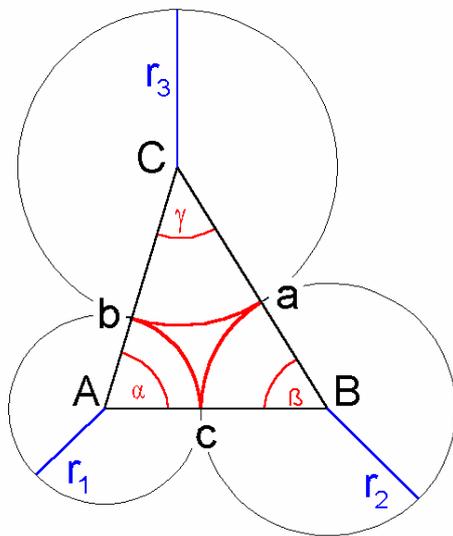
$$A = a \cdot h_a = 1417 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Drei Kreise mit den Radien 3 cm, 4 cm und 5 cm berühren sich.

c) Fertige eine genaue Zeichnung an.

d) Welchen Flächeninhalt hat das von den drei Kreislinien begrenzte „Kreisdreieck“?

Lösung



(Zeichnung nicht im Maßstab)

Gegeben: $a = 9 \text{ cm}$; $b = 8 \text{ cm}$; $c = 7 \text{ cm}$

b) Die Fläche „Kreisdreieck“ ist gleich der Fläche des Dreiecks vermindert um die 3 Sektorflächen.

$$\cos \alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = 73,4^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\beta = 58,4^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 48,2^\circ$$

Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 26,83 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Kreisdreieck:

$$A_K = A_D - \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r_1^2 - \frac{\beta}{360^\circ} \pi r_2^2 - \frac{\gamma}{360^\circ} \pi r_3^2 = 2,34 \text{ [cm}^2\text{]}$$

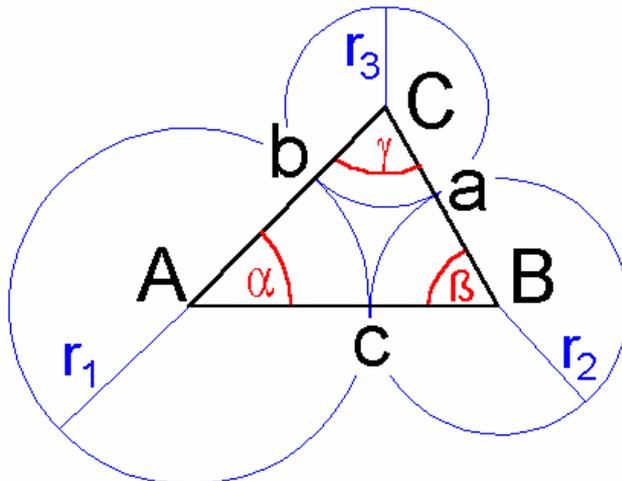
Das Kreisdreieck hat einen Flächeninhalt von $2,34 \text{ cm}^2$.

Gegeben sind drei Kreise mit den Radien $r_1 = 3,2$ cm, $r_2 = 2,3$ cm und $r_3 = 1,8$ cm. Jeder Kreis berührt die beiden anderen von außen. Die Mittelpunkte bilden ein Dreieck.

- Zeichne eine Planfigur.
- Berechne die Innenwinkel des Dreiecks.
- Wie groß ist sein Flächeninhalt?
- Berechne den Anteil der Kreisfläche, die nicht im Dreieck liegt.

Lösung

a)



(Zeichnung nicht im Maßstab)

Gegeben: $a = r_2 + r_3 = 4,1$ cm; $b = r_1 + r_3 = 5$ cm;
 $c = r_1 + r_2 = 5,5$ cm

b) Berechnung der Innenwinkel:

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = 45,7^\circ$$

auf gleichem Weg: $\beta = 60,7^\circ$; $\gamma = 73,6^\circ$

c) Berechnung der Fläche:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma = 9,84 \text{ [cm}^2\text{]}$$

d) Berechnung der Kreisfläche, die nicht im Dreieck liegt:

$$A = A_{\text{Kr1-3}} - A_{\text{Dreieck}} = \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) - 9,84 = 49,12 \text{ [cm}^2\text{]}$$

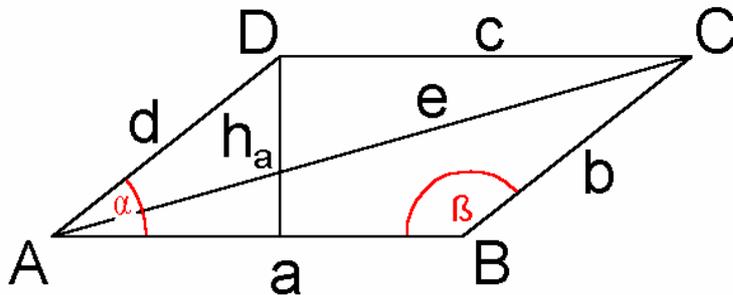
49,12 cm² liegen nicht im Dreieck.

Ein Grundstück hat die Form eines Parallelogramms. Die beiden Seiten sind 49 m und 27 m lang, die Diagonale e beträgt 60 m.

c) Unter welchen Winkeln stehen die Seiten zueinander?

d) Wie hoch liegt der Grundstückspreis, wenn für 1 m² 270 € veranschlagt werden?

Lösung



Gegeben: $a = 49 \text{ m}$; $b = 27 \text{ m}$; $e = 60 \text{ m}$

a) a) Berechnung von der Winkel:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + b^2 - e^2}{2ab}$$

$$\beta = 100,2^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - \beta = 79,8^\circ$$

Die Seiten stehen unter den Winkeln $79,8^\circ$ und $100,2^\circ$.

b) b) Berechnung der Fläche:

$$\sin \alpha = \frac{h}{d}$$

$$A = g \cdot h$$

$$h = d \cdot \sin \alpha$$

$$A = 1302,09 \text{ [m}^2\text{]}$$

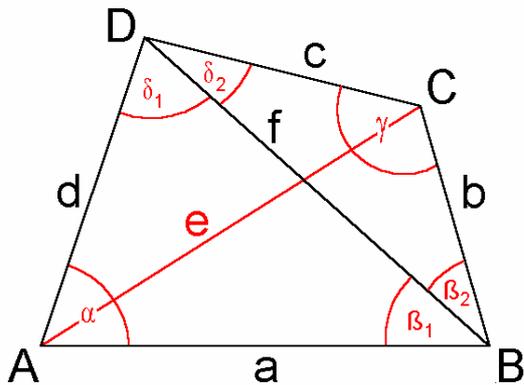
$$h = 26,573 \text{ [m]}$$

$$\text{Preis} = A \cdot 270 = 351\,564,51 \text{ [€]}$$

Der Grundstückspreis liegt bei 351 564,51 €.

Berechne die fehlenden Winkel und die Diagonale f in einem Viereck, wenn $\overline{AB} = a = 856 \text{ m}$; $\overline{BC} = b = 735 \text{ m}$; $\overline{CD} = c = 1000 \text{ m}$; $\overline{DA} = d = 917 \text{ m}$; $\overline{BD} = f = 796 \text{ m}$.

Lösung



Gegeben:

$\overline{AB} = a = 856 \text{ m}$; $\overline{BC} = b = 735 \text{ m}$; $\overline{CD} = c = 1000 \text{ m}$; $\overline{DA} = d = 917 \text{ m}$; $\overline{BD} = f = 796 \text{ m}$.

1. 1. Berechnung von α :

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}$$

$$\alpha = 53,22^\circ$$

2. 2. Berechnung von δ_1 :

$$\frac{\sin \delta_1}{a} = \frac{\sin \alpha}{f}$$

$$\delta_1 = 59,46^\circ$$

3. 3. Berechnung von β_1 :

$$\beta_1 = 180^\circ - \alpha - \delta_1 = 67,32^\circ$$

4. 4. Berechnung von γ :

$$f^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \gamma$$

$$\gamma = 51,92^\circ$$

5. 5. Berechnung von δ_2 :

$$\frac{\sin \delta_2}{b} = \frac{\sin \gamma}{f}$$

$$\delta_2 = 46,62^\circ$$

6. 6. Berechnung von β_2 :

$$\beta_2 = 180^\circ - \gamma - \delta_2 = 81,46^\circ$$

7. 7. Berechnung von f :

$$f = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\beta_1 + \beta_2)} = 1532,7 \text{ [m]}$$

Lösungen:

$$\alpha = 53,22^\circ; \beta = 148,7^\circ; \gamma = 51,92^\circ; \delta = 106,08^\circ$$