

Zinseszinsrechnung und Abschreibungen

1. Für den Verkauf eines Hauses liegen drei Angebote vor:
Angebot A: 280 000 € bar und 150 000 € nach 8 Jahren
Angebot B: alle 2 Jahre eine Rate, insgesamt fünfmal je 100 000 €
- die erste Rate ist sofort fällig
Angebot C: nach 4 Jahren 500 000 €
Welches ist für den Verkäufer das günstigste Angebot, wenn ein Zinssatz von 7,75% p. a. zugrunde gelegt wird?
2. Ein Kapital von 21 000 € wurde 7 Jahre lang mit 4,5% verzinst. Nach weiteren 3 Jahren stieg das Kapital auf 31 685 €. Um wie viel Prozent hat sich der Zinssatz geändert?
3. Ein Sparkonto von 1 800 € wurde 5 Jahre lang mit 6% verzinst. Nun wurde der Zinssatz um 0,5% erhöht. Nach wie vielen Jahren war das Guthaben auf
3 743 € angewachsen?
4. Ein Kapital wächst bei einem Zinssatz von 12,3% auf 3 572,14 €. In wie viel Jahren würde dasselbe Kapital bei einem um 5% niedrigeren Zinssatz auf 3 514,21 € anwachsen?
5. Wie viele Jahre vergehen, bis sich ein beliebiges Kapital bei einer jährlichen Verzinsung von 5,2% um die Hälfte seines ursprünglichen Wertes vermehrt hat?
6. Eine Maschinenanlage hat 165 000 € gekostet.
 - a) Nach 8 Jahren erscheint sie in den Büchern nur noch mit einem Wert von 16 519 €. Wie viel Prozent beträgt die jährliche degressive Abschreibung?
 - b) Wie groß wäre der Buchwert der Maschinenanlage nach 8 Jahren, wenn die jährliche degressive Abschreibung 22% betrüge?
7. Eine Maschine hat 68 000 € gekostet und steht jetzt bei 15% jährliche degressiver Abschreibung mit 41 760 € zu Buch. Wie lange ist die Maschine im Gebrauch?

1. Ein Dreieck mit $\alpha = 85^\circ$; $w_B = 4,5$ cm; $a = 4$ cm rotiert um die Seite c. Berechne das Volumen des Drehkörpers.

2. Eine rechteckige Pyramide mit $a = 8$ cm und $b = 6$ cm hat eine Höhe von 5 cm.
 - a) Zeichne ein Schrägbild der Pyramide.
 - b) Berechne die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche.
 - c) Berechne in der größeren Seitenfläche der Pyramide die drei Innenwinkel.

3. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 2,2$ cm; $b = 4,1$ cm; $c = 5$ cm.
 - a) Bestimme die Innenwinkel des Dreiecks.
 - b) Das Dreieck rotiert um die längste Seite. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

4. Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 2,2$ cm, $b = 4,1$ cm; $c = 5$ cm.
 - a) Bestimme die Innenwinkel des Dreiecks.
 - b) Das Dreieck rotiert um die längste Seite. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

5. Ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $a = 8$ cm und $b = 15$ cm rotiert um seine Hypotenuse c.
 - a) Fertige eine Skizze an.
 - b) Berechne Oberfläche und Volumen des Rotationskörpers.

6. Ein Trapez mit $a = 9$ cm, $h = 3,5$ cm, $\alpha = 55^\circ$ und $\beta = 50^\circ$ rotiert um die Seite a.
 - a) Fertige eine Planfigur an.
 - b) Bestimme Oberfläche und Volumen des Rotationskörpers.

Lösungen

Zinseszinsrechnung und Abschreibungen

1. Für den Verkauf eines Hauses liegen drei Angebote vor:

Angebot A: 280 000 € bar und 150 000 € nach 8 Jahren

Angebot B: alle 2 Jahre eine Rate, insgesamt fünfmal je 100 000 €
- die erste Rate ist sofort fällig

Angebot C: nach 4 Jahren 500 000 €

Welches ist für den Verkäufer das günstigste Angebot, wenn ein Zinssatz von 7,75% p. a. zugrunde gelegt wird?

Angebot A:

$$280000 + \frac{150000}{1,0775^8} \approx 362556,83 \text{ €}$$

Angebot B:

$$100000 + \frac{100000}{1,0775^2} + \frac{100000}{1,0775^4} + \frac{100000}{1,0775^6} + \frac{100000}{1,0775^8} \approx 379256,93 \text{ €}$$

Angebot C:

$$\frac{500000}{1,0775^4} = 370937,63 \text{ €}$$

Das Angebot A ist am günstigsten.

2. Ein Kapital von 21 000 € wurde 7 Jahre lang mit 4,5% verzinst. Nach weiteren 3 Jahren stieg das Kapital auf 31 685 €. Um wie viel Prozent hat sich der Zinssatz geändert?

$$31685 = 21000 \cdot q^3$$

$$q = \sqrt[3]{\frac{31685}{21000 \cdot 1,045^7}} \approx 1,0349995 \Rightarrow p\% \approx 3,5\%$$

Der Zinssatz ist um 1% gesunken.

3. Ein Sparkonto von 1 800 € wurde 5 Jahre lang mit 6% verzinst. Nun wurde der Zinssatz um 0,5% erhöht. Nach wie vielen Jahren war das Guthaben auf

3 743 € angewachsen?

$$3743 = 1800 \cdot 1,06^5 \cdot 1,065^n$$

$$n = \frac{\lg 3743 - \lg 1800 - 5 \cdot \lg 1,06}{\lg 1,065}$$

$$n \approx 6,9989$$

Nach weiteren 7 Jahren war das Kapital auf 3 743 € angewachsen.

4. Ein Kapital wächst bei einem Zinssatz von 12,3% auf 3 572,14 €. In wie viel Jahren würde dasselbe Kapital bei einem um 5% niedrigeren Zinssatz auf 3 514,21 € anwachsen?

$$K_0 = \frac{3572,14}{1,123^5}$$

$$3514,21 = \frac{3572,14}{1,123^5} \cdot 1,073^n$$

$$n \approx 8$$

Dasselbe Kapital würde in 8 Jahren bei einem um 5% niedrigeren Zinssatz auf 3 514,21 € anwachsen.

5. Wie viele Jahre vergehen, bis sich ein beliebiges Kapital bei einer jährlichen Verzinsung von 5,2% um die Hälfte seines ursprünglichen Wertes vermehrt hat?

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$1,5x = x \cdot 1,052^n$$

$$n = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,052}$$

$$n \approx 7,9984257$$

Es vergehen 8 Jahre, bis sich ein beliebiges Kapital bei einer jährlichen Verzinsung von 5,2% um die Hälfte seines ursprünglichen Wertes vermindert.

6. Eine Maschinenanlage hat 165 000 € gekostet.
- c) a) Nach 8 Jahren erscheint sie in den Büchern nur noch mit einem Wert von 16 519 €. Wie viel Prozent beträgt die jährliche degressive Abschreibung?
- d) b) Wie groß wäre der Buchwert der Maschinenanlage nach 8 Jahren, wenn die jährliche degressive Abschreibung 22% betrüge?

Lösung a)

$$16519 = 165000 \cdot q^8$$

$$q = \sqrt[8]{\frac{16519}{165000}}$$

$$q \approx 0,75 \Rightarrow p\% = 25\%$$

Der jährliche degressive Abschreibungssatz beträgt 25%.

Lösung b)

$$R_n = 165000 \cdot 0,78^8$$

$$R_n \approx 22606,89 \text{ €}$$

Der Buchwert würde 22 606,89 € betragen.

7. Eine Maschine hat 68 000 € gekostet und steht jetzt bei 15% jährliche degressiver Abschreibung mit 41 760 € zu Buch. Wie lange ist die Maschine im Gebrauch?

$$41760 = 68000 \cdot 0,85^n$$

$$n = \frac{\lg 41760 - \lg 68000}{\lg 0,85}$$

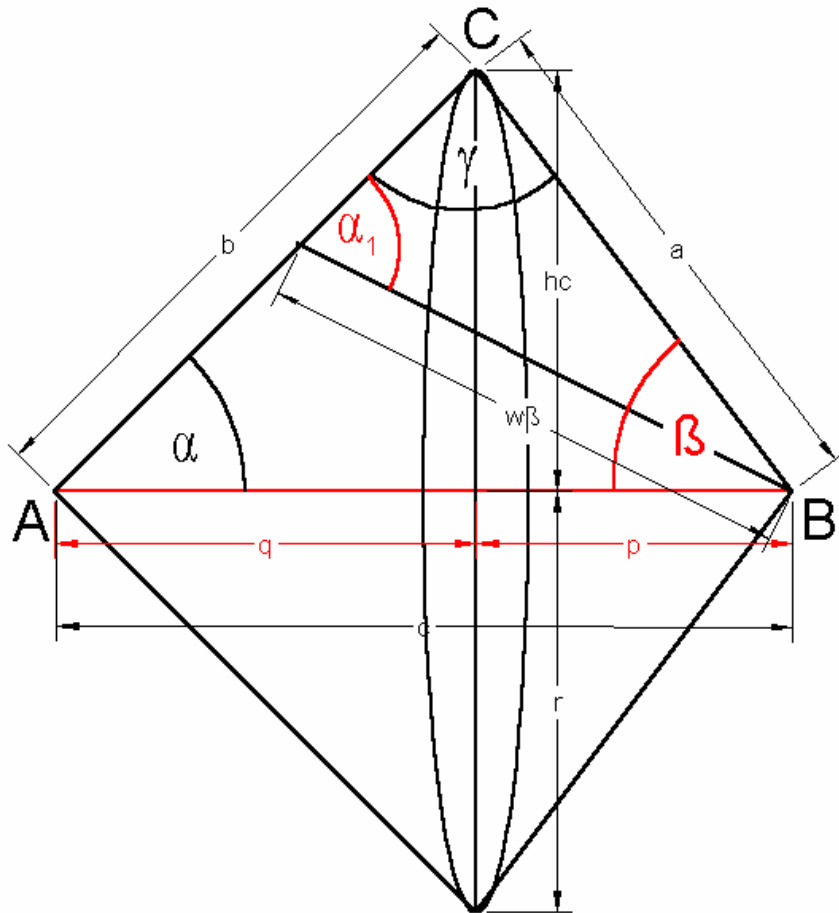
$$n \approx 3,0000737$$

Die Maschine ist 3 Jahre in Gebrauch.

Prüfungsaufgaben – Körperberechnung – Lösung

1. Ein Dreieck mit $\alpha = 85^\circ$; $w_\beta = 4,5 \text{ cm}$; $a = 4 \text{ cm}$ rotiert um die Seite c. Berechne das Volumen des Drehkörpers.

Lösung



$$\frac{\sin \gamma}{w_\beta} = \frac{\sin \alpha_1}{a}$$

$$\alpha_1 = 62,3139^\circ$$

$$\frac{\beta}{2} = 180^\circ - \gamma - \alpha_1 = 32,6861^\circ$$

$$\beta = 65,3722^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - \alpha - \beta = 29,6278^\circ$$

$$\frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c = 8,0604[\text{cm}]$$

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}$$

$$h_c = 3,6361[\text{cm}]$$

Es gilt: $r = h_c$

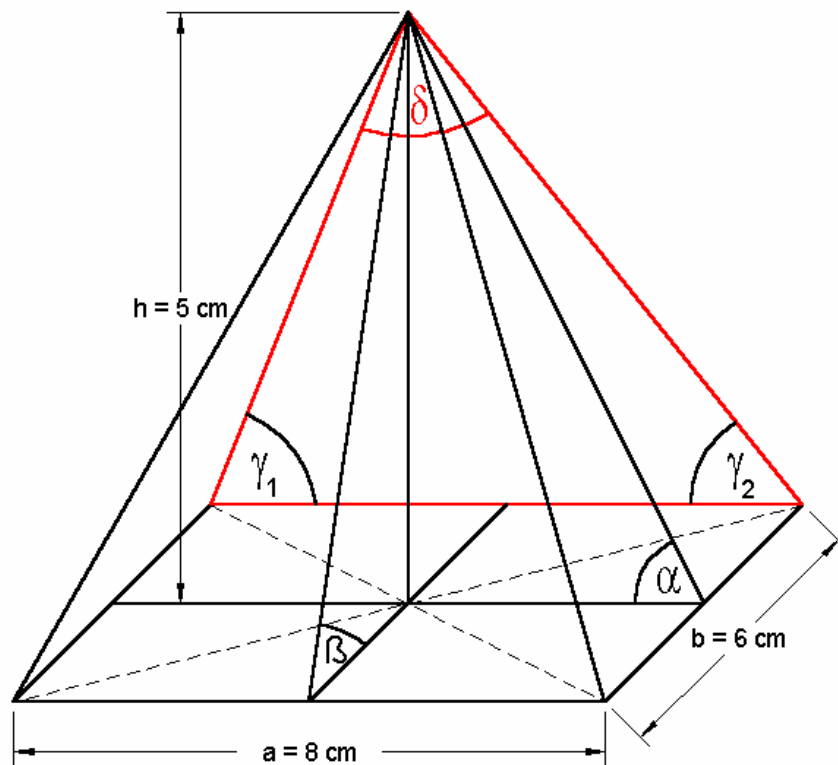
$$V = \frac{\pi r^2 \cdot q}{3} + \frac{\pi r^2 \cdot p}{3}$$

$$V = \frac{\pi r^2}{3} (q + p)$$

$$V = \frac{\pi r^2 \cdot c}{3} = 111,60[\text{cm}^3]$$

2. Lösung

a)



b) Berechnung der Neigungswinkel:

$$\tan \alpha = \frac{5}{4} \quad \alpha = 51,34^\circ$$

$$\tan \beta = \frac{5}{3} \quad \beta = 59,04^\circ$$

c) Berechnung der drei Innenwinkel:

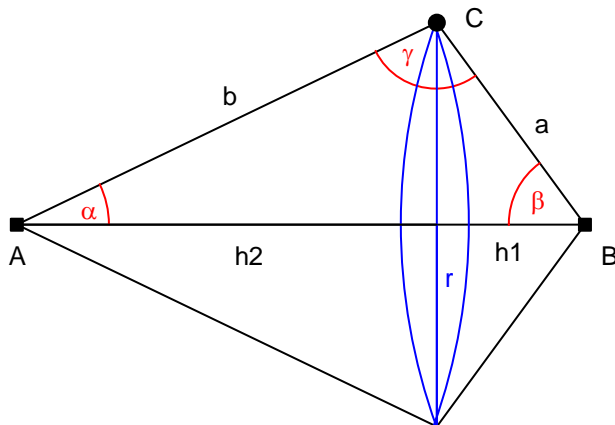
$$h_s = \sqrt{34} = 5,83[\text{cm}]$$

$$\tan \gamma_1 / \gamma_2 = \frac{\sqrt{34}}{4} \quad \gamma_1 / \gamma_2 = 55,55^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 2 \cdot 55,55^\circ = 68,90^\circ$$

3. Lösung

a) a) $a = 2,2 \text{ cm}$; $b = 4,1 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$$

$$\gamma \approx 100,7^\circ$$

$$\alpha \approx 25,6^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \quad = 53,7^\circ$$

Die Innenwinkel betragen $100,7^\circ$, $53,7^\circ$ und $25,6^\circ$.

b) b) $h_1 + h_2 = c$

$$\sin \beta = \frac{r}{a}$$

$$V = V_1 + V_2$$

$$r = a \cdot \sin \beta$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 h_2$$

$$r \approx 1,8 [\text{cm}]$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2)$$

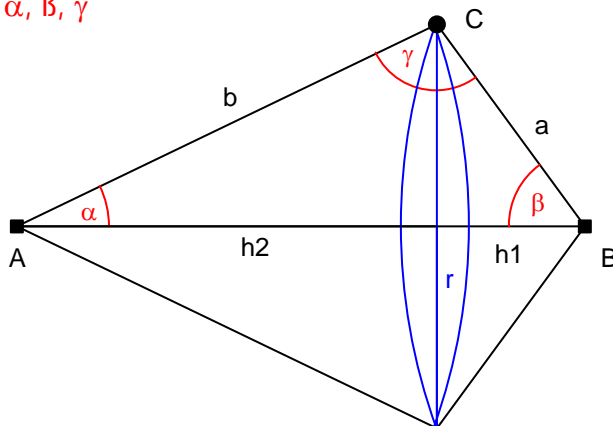
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot c \approx 16,46 [\text{cm}^3]$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt ca. $16,5 \text{ cm}^3$.

4. Lösung

Gegeben: $a = 2,2 \text{ cm}$; $b = 4,1 \text{ cm}$; $c = 5 \text{ cm}$

Gesucht: α, β, γ



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma \approx 100,7^\circ$$

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \gamma}{c}$$

$$\alpha \approx 25,6^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \gamma - \alpha = 53,7^\circ$$

Die Innenwinkel betragen $100,7^\circ$; $53,7^\circ$ und $25,6^\circ$.

b)

$$\sin \beta = \frac{r}{a}$$

$$r = a \cdot \sin \beta$$

$$r \approx 1,8 [\text{cm}]$$

$$V = V_1 + V_2$$

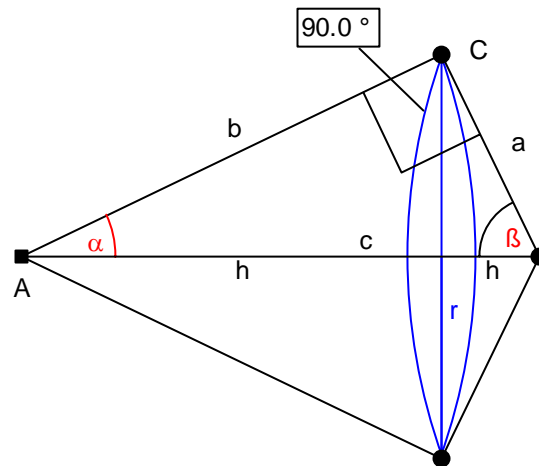
$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 (h_1 + h_2) \quad \text{mit } h_1 + h_2 = c$$

$$V \approx 16,965 [\text{cm}^3]$$

5. Lösung

Gegeben:

$$a = 8 \text{ cm}; b = 15 \text{ cm}$$



Gesucht:

O und V zweier zusammengesetzter Kegel

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = 17 \text{ [cm]}$$

I. I.

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

II. II.

$$\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$$

III. III.

$$r = h_c = b \cdot \left(\frac{a}{c}\right) = 7,0588 \text{ [cm]}$$

$$h_1^2 = b^2 - r^2$$

$$h_2 = c - h_1$$

$$h_1 = 13,235 \text{ [cm]}$$

$$h_2 = 3,765 \text{ [cm]}$$

$$V_{Rot} = V_{Kegel 1} + V_{Kegel 2}$$

$$O_{Rot} = M_{Kegel 1} + M_{Kegel 2}$$

$$V_{Rot} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h_1 + \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h_2$$

$$O_{Rot} = \pi \cdot r \cdot b + \pi \cdot r \cdot a$$

$$V_{Rot} = 887,047 \text{ [cm}^3\text{]}$$

$$O_{Rot} = 510,13 \text{ [cm}^2\text{]}$$

6. Ein Trapez mit $a = 9 \text{ cm}$, $h = 3,5 \text{ cm}$, $\alpha = 55^\circ$ und $\beta = 50^\circ$ rotiert um die Seite a.

- a) c) a) Fertige eine Planfigur an.
 d) b) Bestimme Oberfläche und Volumen des Rotationskörpers.

Gegeben:

$$a = 9 \text{ cm}$$

$$h = r = 3,5 \text{ cm}$$

$$\alpha = 55^\circ, \beta = 50^\circ$$

Berechnung der Oberfläche

$$\sin \alpha = \frac{h}{d} \quad \sin \beta = \frac{h}{b} \quad \tan \alpha = \frac{h}{y} \quad x = \frac{3,5}{\tan 50^\circ}$$

$$d = \frac{3,5}{\sin 55^\circ} \quad b = \frac{3,5}{\sin 50^\circ} \quad y = \frac{3,5}{\tan 55^\circ} \quad x = 2,94 \text{ [cm]}$$

$$d = 4,27 \text{ [cm]} \quad b = 4,57 \text{ [cm]} \quad y = 2,45 \text{ [cm]} \quad c = a - x - y = 3,61 \text{ [cm]}$$

$$O = M_{\text{Kegel1}} + M_{\text{Kegel2}} + M_{\text{Zylinder}}$$

$$O = \pi \cdot r \cdot b + \pi \cdot r \cdot d + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot 3,61$$

$$O = 176,61 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Berechnung des Volumens

$$V = V_{\text{Kegel1}} + V_{\text{Kegel2}} + V_{\text{Zylinder}}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot y + \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot x + \pi \cdot r^2 \cdot c$$

$$V = 208,073 \text{ [cm}^3\text{]}$$

