Übungsaufgaben 10. Klasse Gymasium

A: Lege für die Funktionen f mit $f(x) = 2{,}5^x$ und g mit $g(x) = 0{,}4^x$ eine Wertetabelle für x-Werte im Intervall [-3; 3] an (Schrittweite 0,5). Zeichne die Grafen der Funktionen in ein Koordinatensystem.

B: Überprüfe, ob die Punkte P (3 / 0,027) und Q (-2,5 / 20) auf dem Funktionsgrafen von f mit $f(x) = 0{,}3^x$ liegen.

C: Bestimme die Gleichung einer Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$, deren Graf durch den Punkt P (-3 / 125) geht.

D: Frau Berger zahlt 14000 € auf ein Sparkonto ein und legt den Betrag für sieben Jahre fest an. Der Zinssatz beträgt 3,75 %. Wie hoch ist der Kontostand nach sieben Jahren ?

E: Silizium 32 hat eine Halbwertszeit von 710 Jahren. Zu Beginn der Beobachtung sind 1000 mg vorhanden. Bestimme eine Funktionsgleichung der Form $f(x) = b \cdot a^x$, die den radioaktiven Zerfall beschreibt. Wie viel Milligramm Silizium sind nach 10 (100, 500) Jahren noch vorhanden ?

F: In einem zylindrischen Gefäß wird der Zerfall von Bierschaum untersucht. Die Höhe der Schaumsäule verringert sich alle 15 Sekunden um 9 %.

a) Gib den Faktor für 15 Sekunden an und ermittle mit seiner Hilfe eine Wertetabelle, wenn zu Beginn der Beobachtung die Schaumhöhe 10 cm betrug. Zeichne den Grafen. Wähle dazu auf der x-Achse als Einheit 1 mm.
b) Man spricht von »sehr guter Bierschaumhaltbarkeit«, wenn die Halbwertszeit des Schaumzerfalls größer als 110 Sekunden ist. Überprüfe am Graphen, ob sehr gute Bierschaumhaltbarkeit vorliegt.

G: Eine Wassermelone wiegt 0,3 kg. Sie verdoppelt unter idealen Bedingungen alle 6 Tage ihr Gewicht. Die Funktion Zahl der *Tage -> Gewicht* hat die Form $y = b \cdot a^x$. Bestimme a und b.

H: Strontium 90 hat eine Halbwertszeit von 28 Jahren. Zu Beginn der Beobachtung sind 100 mg vorhanden.

a) Gib den Wachstumsfaktor für 1 Jahr an. Wie lautet die zugehörige Exponentialfunktion ?
b) Wie viel mg Strontium 90 ist nach 50 Jahren noch vorhanden ?

I: Milchsäurebakterien verdoppeln ihre Anzahl bei 37°C etwa alle halbe Stunde. Bestimme die Funktion *Zeit (in h) -> Anzahl der Bakterien* für eine Bakterienkultur mit anfangs 100 Bakterien.

J: An einem Sommertag wird Apfelsaft aus dem Kühlschrank in ein Glas gegossen. Die Temperatur des Saftes ist 14° niedriger als die Raumtemperatur. Diese Temperaturdifferenz halbiert sich bei gleichbleibender Raumtemperatur alle 40 Minuten. Bestimme die Exponentialfunktion *Zeit (in h) -> Temperaturdifferenz (in Grad)* und zeichne ihren Graphen.

K: Bestimme die Exponentialfunktion der Form $f(x) = b \cdot a^x$, deren Graf durch die Punkte P (5 / 24) und Q (8 / 3) geht.

L: Eine Algenkultur wächst pro Tag um 35 %. Die Anfangsmasse beträgt 400 g.

a) Bestimme die Algenmasse für die nächsten 5 Tage und für die 4 Tage, bevor 400 g erreicht wurden.
b) Stelle das Algenwachstum grafisch dar.
c) In der Versuchsanordnung ist nur für 2 200 g Algen Platz. Nach welcher Zeit (exakte Antwort !) ist das Wachstum beendet ?

M: Die Bakterienzahl einer bestimmten Kultur nimmt innerhalb einer Stunde von 240 auf 312 Bakterien zu.

a) Wie viele Bakterien sind es nach 7 Stunden ?
b) Bestimme die Generationszeit.

N: Kohlenstoff C-14 hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren. Wie viel Kohlenstoff ist nach 1000 Jahren von ursprünglich 250 mg noch übrig ?

O: Löse die Gleichungen. Runde - sofern nötig - auf Tausendstel !

a) $4 \cdot \lg(x) = \lg(112) - \lg(7)$
b) $10^{5x+1} = 2$
c) $\log_{25}(5{,}5) = x \cdot \log_{0{,}3}(0{,}1)$
d) $7 \cdot 6^{2x} = 11^{x+3}$

P: Übertrage die Tabelle in den Heft und ergänze die fehlenden Einträge:

Potenzgleichung	**Wurzelgleichung**	**Logarithmusgleichung**
$5^3 = 125$	(i)	(ii)
(iii)	(iv)	$\log_a y = x$

Q: Unter günstigen Bedingungen haben Wanderwolpertinger eine Generationszeit von 45 Tagen.

a) Wie groß wäre eine Population von 20 Wanderwolpertingern nach sechs Monaten ?
b) Zeichne den Graphen dieses Wanderwolpertinger-Wachstums für die ersten 6 Monate. Wähle auf der x-Achse für 15 Tage einen Zentimeter und auf der y-Achse für 20 Wanderwolpertinger einen Zentimeter.

R: Spanien hatte im Jahre 2001 eine Einwohnerzahl von 41.117.000 [Quelle: www.weltalmanach.de]. Die jährliche Zuwachsrate beträgt 1 %. Berechne, mit welcher Einwohnerzahl bei gleichbleibendem Wachstum im Jahr 2050 zu rechnen ist.

S: Die Anzahl eines bestimmten Krankheitserregers nimmt nach Einnahme von Penizillin innerhalb einer Stunde von 312 auf 240 ab.

a) Wie viele Krankheitserreger sind nach 10 Stunden noch übrig ?
b) Bestimme die Halbwertszeit.

T: Herr Rossi - wohlbekannter Glückssucher - plant eine Expedition -> in zwei Jahren will er die besagten Wanderwolpertinger erforschen. Sein Arbeitgeber schlägt ihm folgende Unterstützung vor:
Angebot A: 6 Cent zu Beginn und dann jeden weiteren Monat die Hälfte des bereits erhaltenen Geldes dazu.
Angebot B: 200,- € Startgeld und dann jeden weiteren Monat 25,- €.
Wie soll sich Herr Rossi entscheiden ?

U: 2001 betrug die Einwohnerzahl Spaniens 41.117.000 und die Deutschlands 82.333.000. Während Spanien einen jährlichen Bevölkerungszuwachs von 1 % hat, nimmt in Deutschland die Bevölkerung pro Jahr um 1 % ab.

a) Wann leben unter diesen Voraussetzungen in Spanien genauso viele Menschen wie in Deutschland ?
b) Wie viele Menschen werden dann in Spanien bzw. Deutschland leben ?

V: Die Anzahl eines bestimmten Krankheitserregers nimmt nach Einnahme von Penizillin innerhalb einer Stunde von 30.000 auf 28.250 ab.

a) Wie viele Krankheitserreger sind nach 10 Stunden noch übrig ?
b) Bestimme die Halbwertszeit.

W: Land X hat zur Zeit eine Einwohnerzahl von 20.000.000. Für die nächsten 25 Jahre wird dem Land eine jährliche Zuwachsrate von 1 % vorausgesagt, danach setzt für 25 Jahre eine 1 %-ige Abnahme der Bevölkerung ein.
Berechne, mit welcher Einwohnerzahl im Jahr 2057 zu rechnen ist.

X: Ein Kapital wächst von 6000 € in 8 Jahren auf 11.105,58 €. Zu welchem Zinssatz war das Geld angelegt ?

Y: Karl legte 2003 ein Kapital von 1500 € zu 5,5 % an. Wann ist daraus ein Kapital von 2850 € geworden ?

Lösungen

A: ---

B: $f(x) = 0{,}3^x$ P: $0{,}027 = 0{,}3^3$ - wahre Aussage Q: $20 = 0{,}3^{(-2,5)}$ - falsche Aussage

C: $f(x) = a^x$ $125 = a^{(-3)}$ ➔ $\sqrt[(-3)]{125} = a$ ➔ $0{,}2 = a$

D: $y = b \cdot a^x$ $y = 14000 \cdot 1{,}0375^7$ $y = 18115{,}27$ €

E: P_1: 0 Jahre | 1000 mg ➔ $1000 = b \cdot a^0$ ➔ $b = 1000$
P_2: 710 Jahre | 500 mg ➔ $500 = 1000 \cdot a^{710}$ ➔ $a \approx 0{,}999024$

Funktion: $f(x) = 1000 \cdot 0{,}999024^x$
10 Jahre: $y = 1000 \cdot 0{,}999024^{10}$ ➔ $y_{10} = 990{,}3$ mg
100 Jahre: $y = 1000 \cdot 0{,}999024^{100}$ ➔ $y_{100} = 907{,}0$ mg
500 Jahre: $y = 1000 \cdot 0{,}999024^{500}$ ➔ $y_{500} = 613{,}7$ mg

F: Möglichkeit 1:
Berechnung Wachstumsfaktor für 15 s: 100% - 9% = 91% ➔ 0,91
$y = b \cdot a^x$ ➔ $y = 10 \cdot 0{,}91^{x/15}$
Möglichkeit 2:
Berechnung Wachstumsfaktor für 1 s: $9{,}1 = 10 \cdot a^{15}$ ➔ $y = 10 \cdot 0{,}9937^x$

Bierschaumhaltbarkeit: Halbwertszeit ist ungefähr 110 s, d. h. sie ist okay

G: P_1: 0 Tage | 0,3 kg ➔ $0{,}3 = b \cdot a^0$ ➔ $b = 0{,}3$
P_2: 6 Tage | 0,6 kg ➔ $0{,}6 = 0{,}3 \cdot a^6$ ➔ $a \approx 1{,}1225$

H: a) $y = 100 \cdot 0{,}97555^x$
b) 50 Jahre: 29 mg

I: P_1: 0 Stunden | 100 Bakterien P_2: 0,5 Stunden | 200 Bakt. ➔ $y = 100 \cdot 4^x$

J: Zahlenbeispiel zum Verstehen der Aufgabenstellung:

Zeit (in h)	Raumtemperatur	Safttemperatur	Temperaturdiff.
0 h	24°C	10°C	14°C
2/3 h	24°C	17°C	7°C
1 1/3 h	24°C	20,5°C	3,5°C

Funktion: $f(x) = 14 \cdot 0{,}3536^x$

K: Funktion: $f(x) = 768 \cdot 0{,}5^x$

L: Funktion: $f(x) = 400 \cdot 1{,}35^x$
a) Tag 1: 540 g Tag 2: 729 g Tag (-1): 296 Tag (-2): 219
c) $2200 = 400 \cdot 1{,}35^x$ ➔ $5{,}5 = 1{,}35^x$ ➔ $x = \log_{1,35} 5{,}5$
➔ $x = \lg 5{,}5 / \lg 1{,}35$ ➔ $x \approx 5{,}68$
Antwort: Nach etwas mehr als 5½ Tagen ist das Wachstum beendet.

M: Funktion: $f(x) = 240 \cdot 1{,}3^x$
a) 7 Stunden: $y = 240 \cdot 1{,}3^7$ ➔ $y = 1506$
b) Generationszeit: $480 = 240 \cdot 1{,}3^x$ ➔ $2 = 1{,}3^x$
➔ $x = \log_{1,3} 2$ ➔ $x \approx 2{,}642$ h (ca. 2 h und 40 min)

N: Funktion: $f(x) = 250 \cdot 0{,}999879^x$ 1000 Jahre: $y = 250 \cdot 0{,}999879^{1000} \approx 221{,}5$ mg

O: a) ➔ $\lg(x^4) = \lg(112 \div 7)$ ➔ 10^{hoch} ➔ $x^4 = (112 \div 7) = 16$ ➔ $x = 2$

b) lg ➔ $5x + 1 = \lg 2$ ➔ $5x = \lg 2 - 1$ ➔ $x = (\lg 2 - 1) \div 5$ ➔ $x \approx -0{,}14$

c) $x = \log_{25}(5{,}5) \div \log_{0{,}3}(0{,}1)$ ➔ $x = [\ (\lg 5{,}5 / \lg 25) \div (\lg 0{,}1 / \lg 0{,}3)\ ]$ ➔ $x \approx 0{,}28$

d) lg ➔ $\lg(7 \cdot 6^{2x}) = \lg(11^{x+3})$ ➔ $\lg 7 + x \cdot \lg 36 = x \cdot \lg 11 + 3 \cdot \lg 11$

➔ $x \cdot \lg 36 - x \cdot \lg 11 = 3 \cdot \lg 11 - \lg 7$

➔ $x \cdot (\lg 36 - \lg 11) = 3 \cdot \lg 11 - \lg 7$

➔ $x = (3 \cdot \lg 11 - \lg 7) \div (\lg 36 - \lg 11)$

➔ $x \approx 4{,}426$

P: siehe Heft (16. / 17. / 18. April)

Q:

Tage:	0	45	90	135	180
WW:	20	40	80	160	320

R: $y = 41.117.000 \cdot 1{,}01^{49} \approx 66.952.799$

S: Funktion: $f(x) = 312 \cdot 0{,}7692^x$

a) 10 Stunden: $y = 312 \cdot 0{,}7692^{10}$ ➔ $y \approx 22{,}6$

b) Halbwertszeit: $156 = 312 \cdot 0{,}7692^x$ ➔ $0{,}5 = 0{,}7692^x$

➔ $x = \log_{0{,}7692} 0{,}5$ ➔ $x \approx 2{,}64$ h (ca. 2 h und 40 min)

T: **Angebot A**: $0{,}06 \cdot 1{,}5^{24} = 1010{,}05$ €

Angebot B: $200 + 24 \cdot 25 = 800$ €

U: Spanien: $f(x) = 41.117.000 \cdot 1{,}01^x$

Deutschland: $g(x) = 82.333.000 \cdot 0{,}99^x$

Gleichsetzen: $f(x) = g(x)$ ➔ $41.117.000 \cdot 1{,}01^x = 82.333.000 \cdot 0{,}99^x$

➔ $1{,}01^x \div 0{,}99^x = 82.333.000 \div 41.117.000$

➔ $(1{,}01 \div 0{,}99)^x = 82.333.000 \div 41.117.000$

➔ $1{,}0202^x = 2{,}0024$

➔ $x = \log_{1{,}0202} 2{,}0024$

➔ $x = \lg 2{,}0024 / \lg 1{,}0202$

➔ $x \approx 34{,}7$ Jahre

Antwort 1: Im Jahre 2036 leben in Spanien genauso viele Menschen wie in Deutschland.
Antwort 2: 58.072.843 Menschen

V: Funktion: $f(x) = 30.000 \cdot 0{,}942^x$

a) 10 Stunden: $y = 30.000 \cdot 0{,}942^{10}$ ➔ $y \approx 16.505$

b) Halbwertszeit: $15.000 = 30.000 \cdot 0{,}942^x$ ➔ $0{,}5 = 0{,}942^x$

➔ $x = \log_{0{,}942} 0{,}5$ ➔ $x \approx 11{,}6$ h

W: Funktion 1: $f(x) = 20.000.000 \cdot 1{,}01^x$

Bevölkerung 1: $y = 20.000.000 \cdot 1{,}01^x \approx 25.648.640$

Funktion 2: $f(x) = 25.648.640 \cdot 0{,}99^x$

Bevölkerung 2: $y = 25.648.640 \cdot 0{,}99^x \approx 19.950.060$

Antwort: Im Jahre 2057 ist mit einer Einwohnerzahl von 19.950.060 Menschen zu rechnen.

X: Gleichung: $11105{,}58 = 6000 \cdot a^8$ ➔ $a = 1{,}08$ ➔ Zinssatz: 8%

Y: Funktion: $f(x) = 1500 \cdot 1{,}055^x$ ➔ $2850 = 1500 \cdot 1{,}055^x$

➔ $1{,}9 = 1{,}055^x$

➔ $x = \log_{1{,}055} 1{,}9$

➔ $x = \lg 1{,}9 / \lg 1{,}055$

➔ $x \approx 12$

Antwort: Im Jahre 2015 sind aus den 1500 € ca. 2850 € geworden.