

Ein 38 m hoher Aussichtsturm steht 120 m vom diesseitigen Ufer eines Sees entfernt. Das jenseitige Ufer erscheint von der Turmspitze aus unter einem Tiefenwinkel von  $5,3^\circ$ .

- Fertige eine Skizze an.
- Wie breit ist der See?
- Unter welchem Höhenwinkel erscheint die Turmspitze vom diesseitigen Ufer aus?

Ein Flugzeug fliegt bei starkem Südwestwind (13,9 m/s) mit 643 km/h rw.  $108^\circ$ . Welchen Kurs steuert der Pilot und wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs?

Ein Denkmal besteht aus einem Sockel und einer darauf stehenden Figur. Ein Beobachter peilt aus 8,60 m die Oberkante des Sockels unter  $23^\circ$  und die Oberkante der Figur unter  $34^\circ$  an. Die Höhe des Messgerätes beträgt 1,60 m. Berechne die Höhe des Sockels, die Höhe der Figur und die des gesamten Denkmals. Rechne auf cm genau. Fertige eine Planfigur an.

Ein Flugzeug hat eine Flughöhe von 2424 m und wird von zwei Orten, die in Flugrichtung – vor dem Flugzeug – hintereinander liegen, unter den Erhebungswinkeln  $9,5^\circ$  und  $16,1^\circ$  gesichtet.

- Fertige eine Planfigur an.
- Berechne die Entfernung der Orte voneinander bei gleicher Höhe über dem Meeresspiegel.
- Berechne den Abstand des Flugzeuges vom weiter entfernten Ort.

Von einem Punkt A gehen zwei Wege aus:  $\overline{AB}$  von 88 m und  $\overline{AC}$  von 76 m Länge. Sie schließen einen Winkel von  $42^\circ$  ein. Die beiden Endpunkte sollen durch einen dritten Weg verbunden werden.

Berechne die Länge dieses Weges, die Winkel zu den beiden vorhandenen Wegen sowie die von allen drei Wegen eingeschlossene Fläche. (Planfigur)

Eine Landstraße und eine Bahnlinie verlaufen parallel zueinander. Von 2 Bushaltestellen A und B, die einen Abstand von 930 m haben, führt jeweils ein geradliniger Weg zum Bahnhof C. ( $\overline{AC} = 560$  m;  $\overline{BC} = 485$  m)

- Zeichne eine Planfigur.
- Unter welchem Winkel treffen die Wege am Bahnhof aufeinander?

- c) Es ist eine neue Bushaltestelle geplant, die zwischen A und B liegt und die kürzeste Verbindung zum Bahnhof ermöglichen soll. Wie weit wird die neue Haltestelle von den alten Bushaltestellen entfernt sein?

Von einem Auto aus sieht der Fahrer die Spitze eines Sendemastes unter einem Höhenwinkel von  $a = 42^\circ$ . Nach einer Fahrzeit von 35 s mit 20 m/s beträgt der Höhenwinkel  $a_1 = 65^\circ$ . Das Auto fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf horizontaler, gerader Straße auf den 470 m hohen Berg zu, der den Mast trägt.

- a) Wie weit ist das Fahrzeug bei beiden Peilungen von der Mastspitze entfernt?  
b) Wie hoch ist der Sendemast?

Ein Bergsteiger ist an einer 800 m senkrecht abfallenden Steilwand über den Rand gestürzt und irgendwo hängen geblieben. Seine Kameraden wollen versuchen, von oben ein Seil zu ihm herabzulassen. Dieses Seil können sie per Funk von einer Berghütte anfordern. Diese Hütte befindet sich in gleicher Höhe wie der Fuß der Steilwand.

Der Rettungsposten in der Berghütte sieht den abgestürzten Bergsteiger unter einem Höhenwinkel von  $38^\circ 16'$  und die auf der Abbruchkante stehenden Retter unter einem Höhenwinkel von  $42^\circ 20'$ .

- a) Fertige eine Planskizze an und benenne sie mit den von dir benutzten Variablen.  
b) Wie lang muss das angeforderte Seil mindestens sein, um den Verunglückten von oben zu erreichen?

Von den Endpunkten A und B einer 650 m langen Standlinie am Ufer eines Gewässers werden zwei Schiffe C und D (Schiffsmitte) unter folgenden Winkeln angepeilt:

$$\sphericalangle DAB = \alpha_1 = 80,8^\circ; \sphericalangle CAB = \alpha_2 = 50,1^\circ, \sphericalangle CBA = \beta_1 = 78,8^\circ \text{ und } \sphericalangle DBA = \beta_2 = 36,1^\circ$$

Wie weit liegen die Schiffsmittelpunkte voneinander entfernt?

Die geradlinigen Arme eines Flussdeltas, die einen Winkel von  $39^\circ$  bilden, schneiden ein dreieckiges Stück Land ab. Die Arme sind 17,4 km und 34,3 km lang.

- a) Fertige eine Planskizze an und benenne sie mit den von dir benutzten Variablen.  
b) Wie groß ist das Landstück zwischen den Flussarmen?  
c) Wie groß ist der Umfang des Landstücks zwischen den Flussarmen?  
d) Welchen Winkel bildet der längere Flussarm mit der geradlinigen Küste?

Ein 38 m hoher Aussichtsturm steht 120 m vom diesseitigen Ufer eines Sees entfernt. Das jenseitige Ufer erscheint von der Turmspitze aus unter einem Tiefenwinkel von  $5,3^\circ$ .

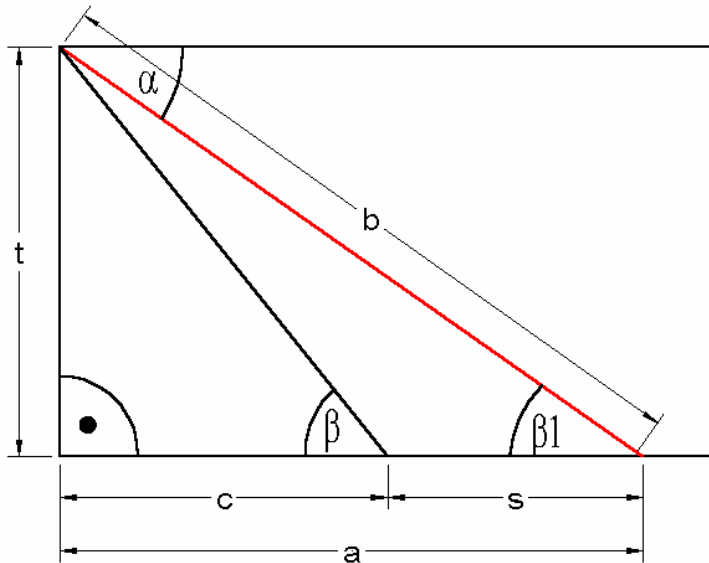
d) Fertige eine Skizze an.

e) Wie breit ist der See?

f) Unter welchem Höhenwinkel erscheint die Turmspitze vom diesseitigen Ufer aus?

**Lösung**

a)



**Gegeben:**  $t = 38 \text{ m}$ ;  $c = 120 \text{ m}$ ;  $\alpha = 5,3^\circ$

**b) Berechnung der Seebreite:**

$$\beta_1 = \alpha$$

$$\sin \beta_1 = \frac{t}{b}$$

$$b = 411,38 \text{ [m]}$$

$$\cos \beta_1 = \frac{a}{b}$$

$$a = 409,62 \text{ [m]}$$

$$s = a - c$$

$$s = 289,63 \text{ [m]}$$

**c) Berechnung des Höhenwinkels:**

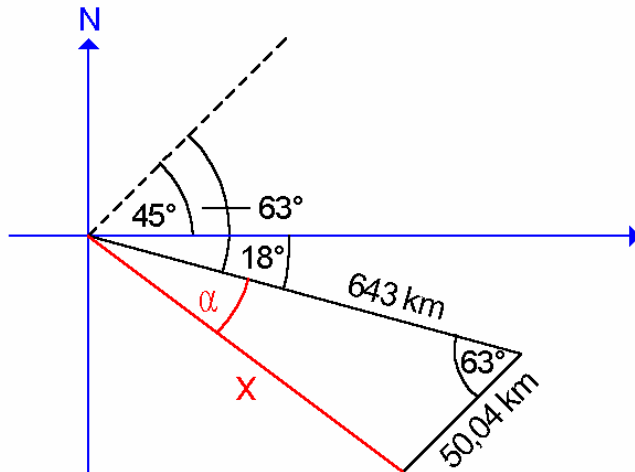
$$\tan \beta = \frac{t}{c}$$

$$\beta = 17,57^\circ$$

Der See ist ca. 290 m breit; die Turmspitze erscheint unter dem Höhenwinkel  $17,57^\circ$ .

Ein Flugzeug fliegt bei starkem Südwestwind (13,9 m/s) mit 643 km/h rw.  $108^{\circ}$ .  
Welchen Kurs steuert der Pilot und wie groß ist die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs?

Lösung:



$$13,9 \text{ m/s} = 50,04 \text{ km/h}$$

**Berechnung von x:**

$$x^2 = 50,04^2 + 643^2 - 2 \cdot 50,04 \cdot 643 \cdot \cos 63^{\circ}$$

$$x = 621,883 \text{ [km]}$$

**Berechnung von  $\alpha$ :**

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 63^{\circ}} = \frac{50,04}{621,883}$$

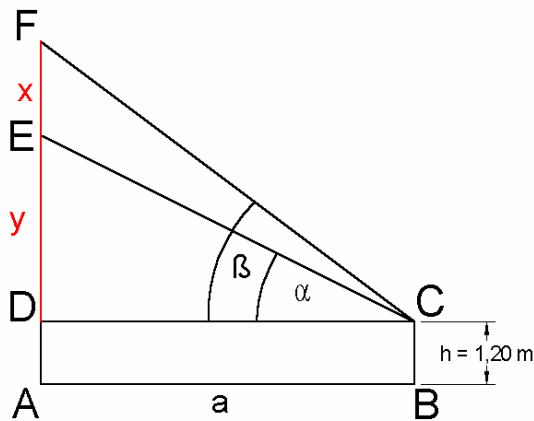
$$\alpha = 4,11^{\circ}$$

Der Kurs beträgt:  $108^{\circ} + 4,11^{\circ} = 112,11^{\circ}$

Die Eigengeschwindigkeit ist ca. 622 km/h.

Ein Denkmal besteht aus einem Sockel und einer darauf stehenden Figur. Ein Beobachter peilt aus 8,60 m die Oberkante des Sockels unter  $23^\circ$  und die Oberkante der Figur unter  $34^\circ$  an. Die Höhe des Messgerätes beträgt 1,60 m. Berechne die Höhe des Sockels, die Höhe der Figur und die des gesamten Denkmals. Rechne auf cm genau. Fertige eine Planfigur an.

Lösung:



Gegeben:

$$a = 8,60\text{ m}; \alpha = 23^\circ; \beta = 34^\circ; h = 1,60\text{ m}$$

Berechnung von  $x$  und  $y$ :

$$\tan \alpha = \frac{y}{a}$$

$$y = a \cdot \tan \alpha = 3,650\text{ [m]}$$

$$\tan \beta = \frac{x + y}{a}$$

$$x + y = a \cdot \tan \beta = 5,801\text{ [m]}$$

$$x = 2,151\text{ [m]}$$

$$h + y = 5,25\text{ [m]}$$

$$h + y + x = 7,4\text{ [m]}$$

Das gesamte Denkmal hat eine Höhe von 7,40 m, der Sockel ist 5,25 m hoch, die Figur 2,15 m.

Ein Flugzeug hat eine Flughöhe von 2424 m und wird von zwei Orten, die in Flugrichtung - vor dem Flugzeug - hintereinander liegen, unter den Erhebungswinkeln  $9,5^\circ$  und  $16,1^\circ$  gesichtet.

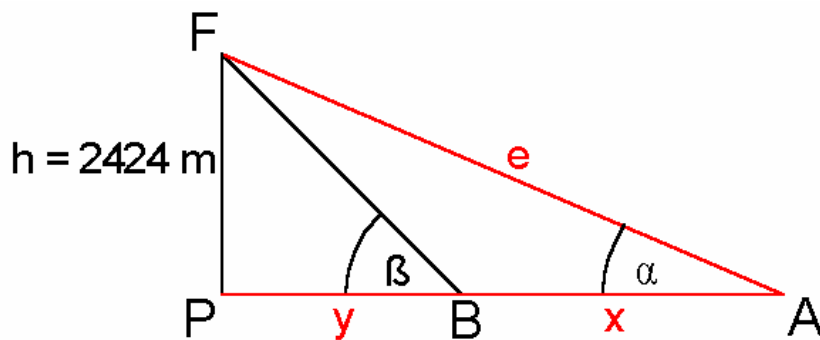
d) Fertige eine Planfigur an.

e) Berechne die Entfernung der Orte voneinander bei gleicher Höhe über dem Meeresspiegel.

f) Berechne den Abstand des Flugzeuges vom weiter entfernten Ort.

**Lösung**

a)



**Gegeben:**  $\alpha = 9,5^\circ$ ;  $\beta = 16,1^\circ$ ,  $h = 2424 \text{ m}$

b)

**Berechnung von y:**

$$\tan \beta = \frac{h}{y}$$

$$y = \frac{h}{\tan \beta} = 8398 \text{ [m]}$$

**Berechnung von x:**

$$\tan \alpha = \frac{h}{x+y}$$

$$x+y = \frac{h}{\tan \alpha} = 14485 \text{ [m]}$$

$$x = 6087 \text{ [m]}$$

c)

**Berechnung von e:**

$$\sin \alpha = \frac{h}{e}$$

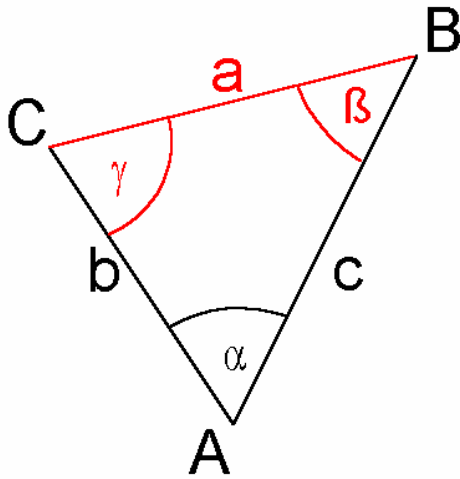
$$e = \frac{h}{\sin \alpha} = 14686 \text{ [m]}$$

Die Orte sind 6087 m voneinander entfernt. Zum Zeitpunkt der Messung hat das Flugzeug von A einen Abstand von 14686 m.

Von einem Punkt A gehen zwei Wege aus:  $\overline{AB}$  von 88 m und  $\overline{AC}$  von 76 m Länge. Sie schließen einen Winkel von  $42^\circ$  ein. Die beiden Endpunkte sollen durch einen dritten Weg verbunden werden.

Berechne die Länge dieses Weges, die Winkel zu den beiden vorhandenen Wegen sowie die von allen drei Wegen eingeschlossene Fläche. (Planfigur)

**Lösung**



**Gegeben:**

$$c = 88 \text{ m}, b = 76 \text{ m}, \alpha = 42^\circ$$

**Berechnung von x:**

$$x^2 = c^2 + b^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$x = 59,83 \text{ [m]}$$

**Berechnung von  $\beta$ :**

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b}{x}$$

$$\beta = 58,2^\circ$$

**Berechnung von  $\gamma$ :**

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

$$\gamma = 79,8^\circ$$

Für die Fläche gilt:

$$A = \frac{b \cdot c \cdot \sin \alpha}{2} = 2238 \text{ [m}^2\text{]}$$

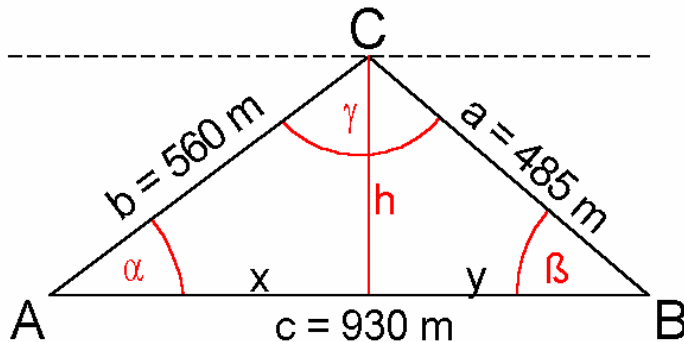
Der Verbindungsweg wird ca. 60 m lang, die Winkel zu den beiden alten Wegen betragen  $58,2^\circ$  und  $79,8^\circ$ . Die eingeschlossene Fläche ist  $2238 \text{ m}^2$  groß.

Eine Landstraße und eine Bahnlinie verlaufen parallel zueinander. Von 2 Bushaltestellen A und B, die einen Abstand von 930 m haben, führt jeweils ein geradliniger Weg zum Bahnhof C. ( $\overline{AC} = 560 \text{ m}$ ;  $\overline{BC} = 485 \text{ m}$ )

- d) Zeichne eine Planfigur.  
 e) Unter welchem Winkel treffen die Wege am Bahnhof aufeinander?  
 f) Es ist eine neue Bushaltestelle geplant, die zwischen A und B liegt und die kürzeste Verbindung zum Bahnhof ermöglichen soll. Wie weit wird die neue Haltestelle von den alten Bushaltestellen entfernt sein?

### Lösung

a)



b) Berechnung von  $\gamma$ :

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\gamma = 125,58^\circ$$

c) Berechnung von x und y:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{485}{930}$$

$$\alpha = 25,1^\circ$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{560}$$

$$x = 507,12 \text{ [m]}$$

$$y = 930 - x$$

$$y = 422,88 \text{ [m]}$$

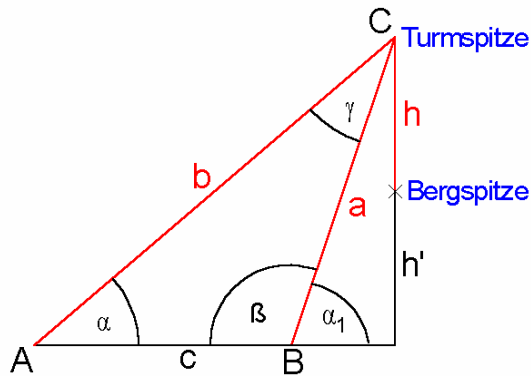
Die Wege treffen unter einem Winkel von  $125,58^\circ$  aufeinander. Die neue Haltestelle ist von A 507,12 m, von B 422,88 m entfernt.



Von einem Auto aus sieht der Fahrer die Spitze eines Sendemastes unter einem Höhenwinkel von  $\alpha = 42^\circ$ . Nach einer Fahrzeit von 35 s mit 20 m/s beträgt der Höhenwinkel  $\alpha_1 = 65^\circ$ . Das Auto fährt mit gleichbleibender Geschwindigkeit auf horizontaler, gerader Straße auf den 470 m hohen Berg zu, der den Mast trägt.

c) Wie weit ist das Fahrzeug bei beiden Peilungen von der Mastspitze entfernt?  
d) Wie hoch ist der Sendemast?

### Lösung



### Gegeben:

$$a = 42^\circ; \alpha_1 = 65^\circ; h' = 470 \text{ m}$$

$$c = 35 \cdot 20 = 700 \text{ [m]}$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha_1 = 115^\circ$$

$$g = 180^\circ - 42^\circ - 115^\circ = 23^\circ$$

### Berechnung von a und b:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a = \frac{700 \cdot \sin 42^\circ}{\sin 23^\circ} = 1198,76 \text{ [m]}$$

$$\frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$b = \frac{700 \cdot \sin 115^\circ}{\sin 23^\circ} = 1623,66 \text{ [m]}$$

### Berechnung von h:

$$\frac{h + h'}{a} = \sin \alpha_1$$

$$h + h' = 1198,76 \cdot \sin 65^\circ = 1086,46 \text{ [m]}$$

$$h = 1086,46 - 470 = 616,46 \text{ [m]}$$

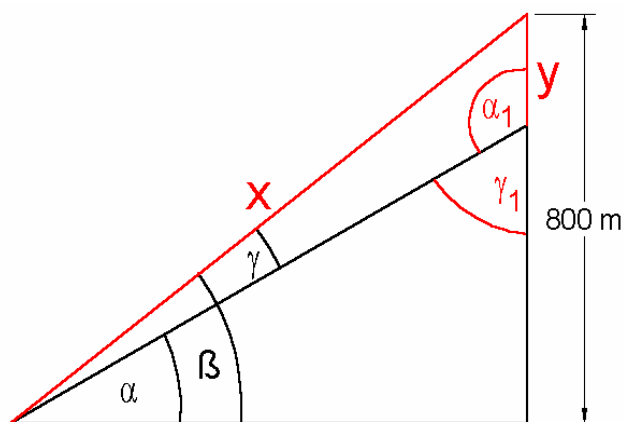
Das Fahrzeug ist bei den Peilungen ca. 1199 m bzw. ca. 1624 m von der Mastspitze entfernt. Der Sendemast hat eine Höhe von 616,46 m.

Ein Bergsteiger ist an einer 800 m senkrecht abfallenden Steilwand über den Rand gestürzt und irgendwo hängen geblieben. Seine Kameraden wollen versuchen, von oben ein Seil zu ihm herabzulassen. Dieses Seil können sie per Funk von einer Berghütte anfordern. Diese Hütte befindet sich in gleicher Höhe wie der Fuß der Steilwand.

Der Rettungsposten in der Berghütte sieht den abgestürzten Bergsteiger unter einem Höhenwinkel von  $38^{\circ}16'$  und die auf der Abbruchkante stehenden Retter unter einem Höhenwinkel von  $42^{\circ}20'$ .

- c) Fertige eine Planskizze an und benenne sie mit den von dir benutzten Variablen.  
d) Wie lang muss das angeforderte Seil mindestens sein, um den Verunglückten von oben zu erreichen?

**Lösung:**



**Gegeben:**

$$h = 800 \text{ m}; a = 38^{\circ}16' = 38,27^{\circ}; \beta = 42^{\circ}20' = 42,33^{\circ}$$

$$g = a - \beta = 4,07^{\circ}$$

$$g_1 = 180^{\circ} - 90^{\circ} - a = 51,73^{\circ}$$

$$a_1 = 180^{\circ} - g_1 = 128,27^{\circ}$$

**Berechnung von x:**

$$\sin \beta = \frac{h}{x}$$

$$x = \frac{h}{\sin \beta} = 1187,926 \text{ [m]}$$

**Berechnung von y:**

$$\frac{y}{\sin \gamma} = \frac{x}{\sin \alpha_1}$$

$$y = 107,39 \text{ [m]}$$

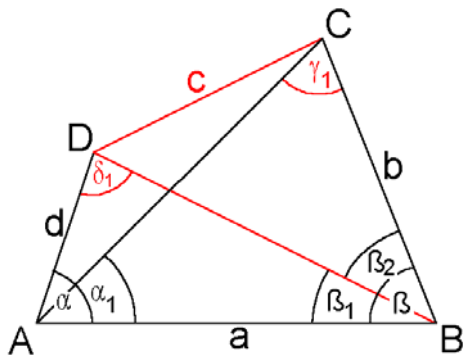
Das Seil muss ca. 108 m lang sein.

Von den Endpunkten A und B einer 650 m langen Standlinie am Ufer eines Gewässers werden zwei Schiffe C und D (Schiffsmitte) unter folgenden Winkeln angepeilt:

$$\sphericalangle DAB = \alpha_1 = 80,8^\circ; \sphericalangle CAB = \alpha_2 = 50,1^\circ, \sphericalangle CBA = \beta_1 = 78,8^\circ \text{ und } \sphericalangle DBA = \beta_2 = 36,1^\circ$$

Wie weit liegen die Schiffsmittelpunkte voneinander entfernt?

### Lösung



#### Gegeben:

$$a = 80,8^\circ; a_2 = 50,1^\circ;$$

$$\beta = 78,8^\circ; \beta_1 = 36,1^\circ;$$

$$c = 650 \text{ m}$$

#### Berechnung von $g_1$ , $g_2$ und $\beta_2$ :

$$g_1 = 180^\circ - \beta_2 - a_1 = 51,1^\circ$$

$$\delta_1 = 180^\circ - \beta_1 - \alpha = 63,1^\circ$$

$$\beta_2 = \beta - \beta_2 = 42,7^\circ$$

#### Berechnung von $\overline{BC}$ :

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \alpha_2} = \frac{\overline{AB}}{\sin \gamma_1}$$

$$\overline{BC} = 640,75 \text{ [m]}$$

#### Berechnung von $\overline{BD}$ :

$$\frac{\overline{BD}}{\sin \alpha} = \frac{\overline{AB}}{\sin \delta_2}$$

$$\overline{BD} = 719,5 \text{ [m]}$$

#### Berechnung von $\overline{DC}$ :

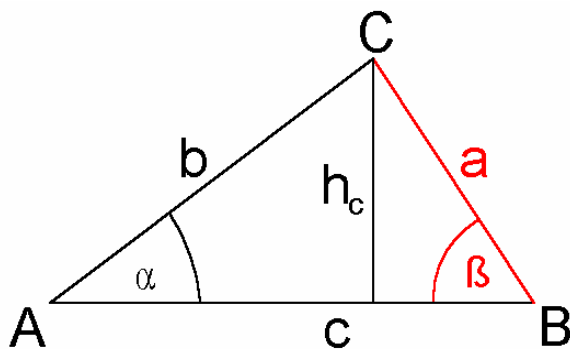
$$\overline{DC}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{BD} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \beta_2$$

$$\overline{DC} = 500,6 \text{ [m]}$$

Die geradlinigen Arme eines Flussdeltas, die einen Winkel von  $39^\circ$  bilden, schneiden ein dreieckiges Stück Land ab. Die Arme sind 17,4 km und 34,3 km lang.

- e) Fertige eine Planskizze an und benenne sie mit den von dir benutzten Variablen.
- f) Wie groß ist das Landstück zwischen den Flussarmen?
- g) Wie groß ist der Umfang des Landstücks zwischen den Flussarmen?
- h) Welchen Winkel bildet der längere Flussarm mit der geradlinigen Küste?

Lösung



Gegeben:

$$\alpha = 39^\circ, b = 17,4 \text{ km}; c = 34,3 \text{ km}$$

b) Berechnung der Fläche:

$$A = \frac{1}{2}bc \cdot \sin \alpha$$

$$A = 187,79 \text{ [km}^2\text{]}$$

c) Berechnung des Umfanges der Landfläche:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$$

$$a = 23,487 \text{ km}$$

$$U = a + b + c = 75,187 \text{ km}$$

d) Berechnung von  $\beta$ ;

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b}$$

$$\sin \beta = \frac{b \cdot \sin \alpha}{a}$$

$$\beta = 27,79^\circ$$