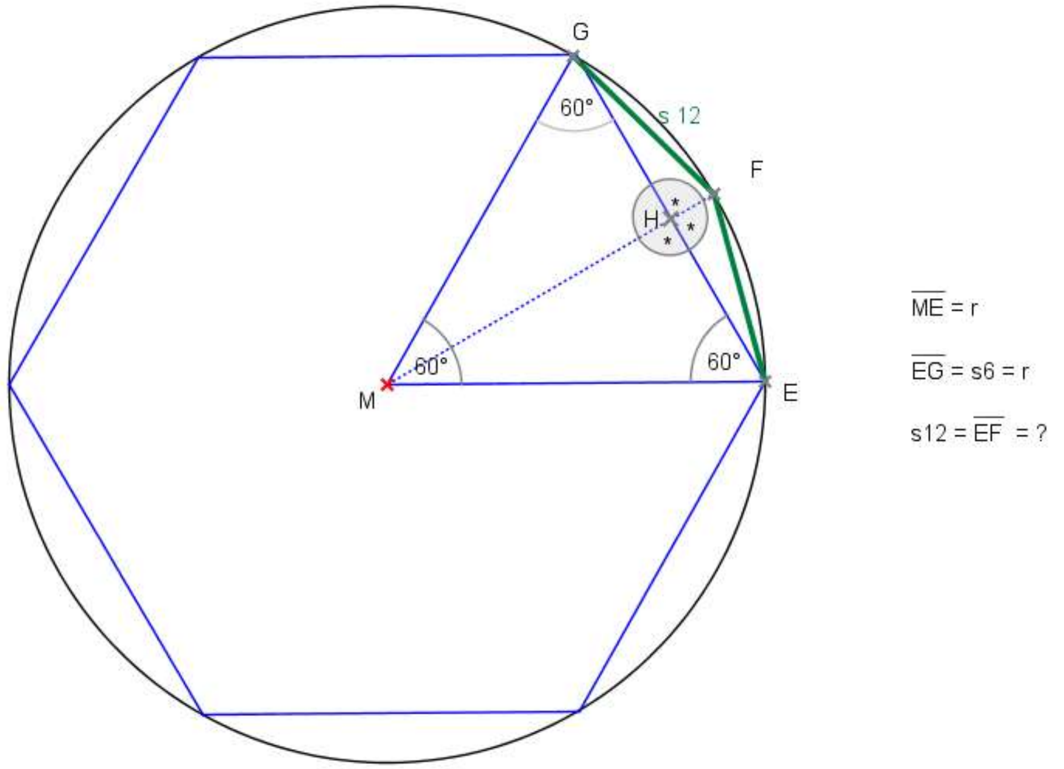
1. Schulaufgabe aus der Mathematik, 10. Klasse
Volumen, Flächen, Kreisbogen

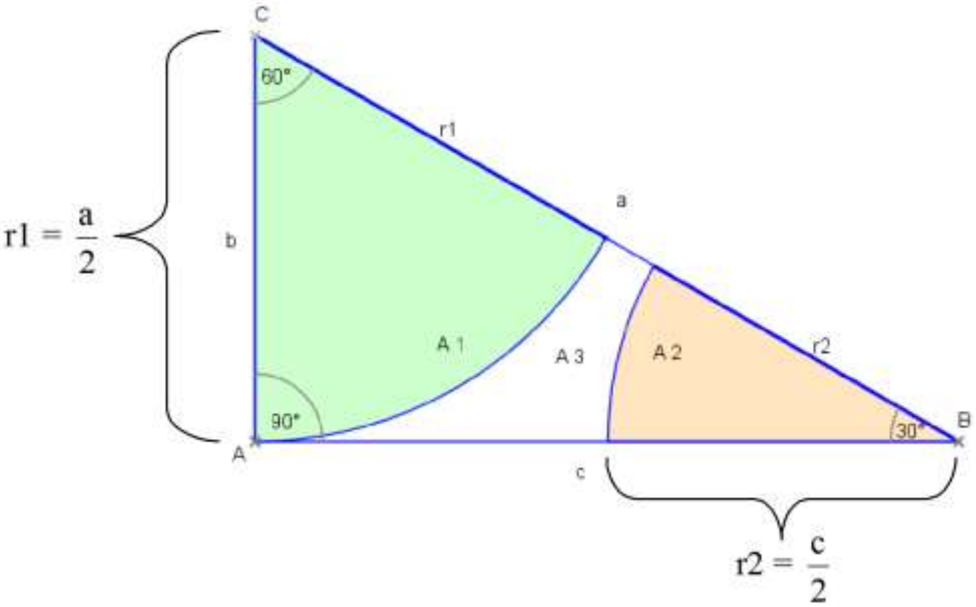
1. Ein Quader (Länge 6 cm, Breite 4 cm, Höhe 2 cm) besteht aus Gold. Er wird vollständig eingeschmolzen; anschließend wird aus dem Material eine Kugel hergestellt.
Berechnen Sie den Radius dieser Kugel!

2. In welcher Zeit legt die Spitze des großen Zeigers einer Turmuhr (Zeigerlänge 1,5 m) einen Weg von 1,57 m zurück? (Skizze und Rechnung!)

3. Einem Kreis mit dem Radius r ist ein regelmäßiges Sechseck (blau) (Seitenlänge: r) und ein regelmäßiges Zwölfeck (grün) einbeschrieben (siehe Skizze).
Berechnen Sie die Seitenlänge des Zwölfecks (Bezeichnung s_{12}) in Abhängigkeit von r!



4. Berechnen Sie den Inhalt der Flächenstücke A 1 , A 2 und A 3 in Abhängigkeit von a ! (Hinweis : Welcher Zusammenhang besteht zwischen a und c ?)



Lösungen:

1)

geg.: $V_Q = l * b * h$

ges.: Radius r einer Kugel mit $V_K = V_Q$

$V_Q = 6cm * 4cm * 2cm = 48cm^3$

$V_K = \frac{4}{3} * \pi * r^3 \quad \Big| : \pi * \frac{3}{4}$ (Volumenformel für Kugel muss so umgestellt werden, dass r alleine steht!)

$\frac{V_K * 3}{\pi * 4} = r^3 \quad \Big| \sqrt[3]{}$

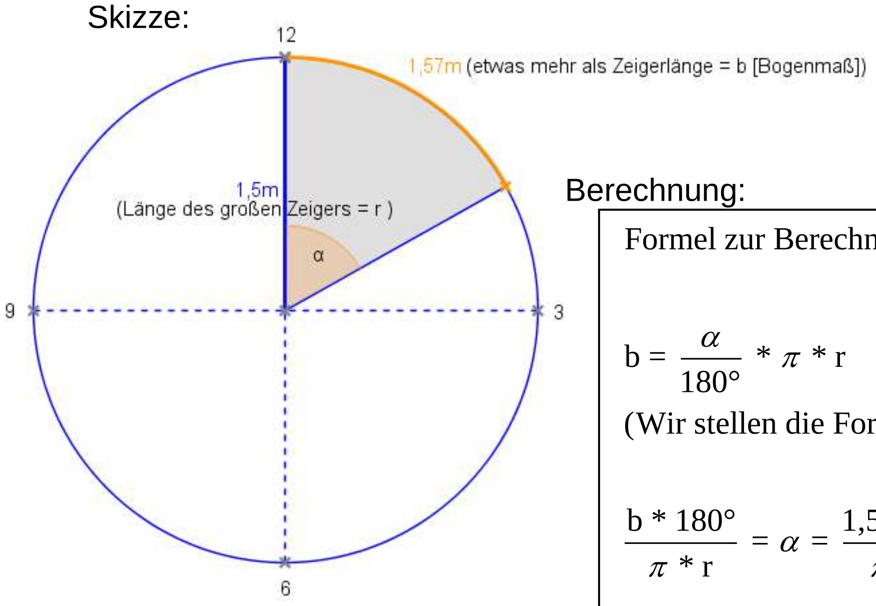
$$\sqrt[3]{\frac{V_K * 3}{\pi * 4}} = r = \sqrt[3]{\frac{48cm^3 * 3}{\pi * 4}} = \sqrt[3]{\frac{144cm^3}{12,6}} = \sqrt[3]{11,43cm^3} = 2,25cm$$

Antwort: Der Radius beträgt ca. 2,25cm. (Es wurde auf 2 Stellen nach Komma gerundet)

2) geg.: r = 1.5m ; b = 1,57m

ges.: t

Skizze:



Berechnung:

Formel zur Berechnung des Bogenmaßes:

$b = \frac{\alpha}{180°} * \pi * r \quad \Big| : \pi \Big| : r \Big| * 180°$

(Wir stellen die Formel um, weil wir α ausrechnen wollen)

$$\frac{b * 180°}{\pi * r} = \alpha = \frac{1,57m * 180°}{\pi * 1,5m} = 59,97° \approx 60°$$

360° ≙ 60min

$\underline{\underline{60° ≙ 10min}}$

Antwort:

Die Spitze des großen Zeigers legt die Strecke in 10 Minutenzurück.

3)

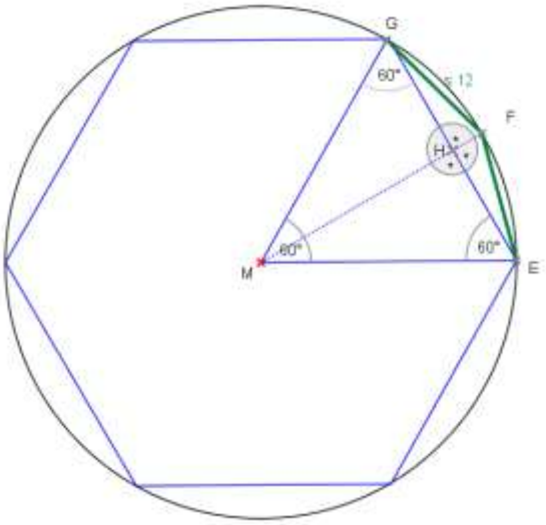
Um s12 in Abhängigkeit von r berechnen zu können, brauchen wir die zwei anderen Seiten des rechtwinkligen Dreiecks HEF.

$\overline{MF} = r$

Berechnung von $\overline{\text{MH}}$

(Formel für die Höhe eines gleichseitigen Δ_s) $\quad \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\underline{\overline{\text{MH}} = \frac{r}{2}\sqrt{3}}$



Berechnung von $\overline{\text{HF}}$

$\overline{\text{HF}} = \overline{\text{MF}} - \overline{\text{MH}}$

$\underline{\overline{\text{HF}} = r - \frac{r}{2}\sqrt{3}}$

$\underline{\overline{\text{HE}} = \frac{1}{2}\, s_6 = \frac{r}{2}}$

Δ HFE

$a^2 + b^2 = c^2$

$\overline{\text{HF}}^2 + \overline{\text{HE}}^2 = \overline{\text{EF}}^2$

$$\overline{\text{EF}}^2 = \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - 2r * \frac{r}{2}\sqrt{3} + \frac{r^2}{4} * 3 + \frac{r^2}{4}$$

$$= r^2 - 2\frac{r^2}{2}\sqrt{3} + \frac{r^2}{4}3 + \frac{r^2}{4}$$

$$\overline{\text{EF}}^2 = \left(1 - 2 * \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{4} * 3 + \frac{1}{4}\right) r^2 = \left(2 - \sqrt{3}\right) r^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

(Wir brauchen aber nur $\overline{\text{EF}}$!!)

$$\overline{\text{EF}} = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right) r^2} = \underline{\underline{\sqrt{2-\sqrt{3}}\; r}}$$

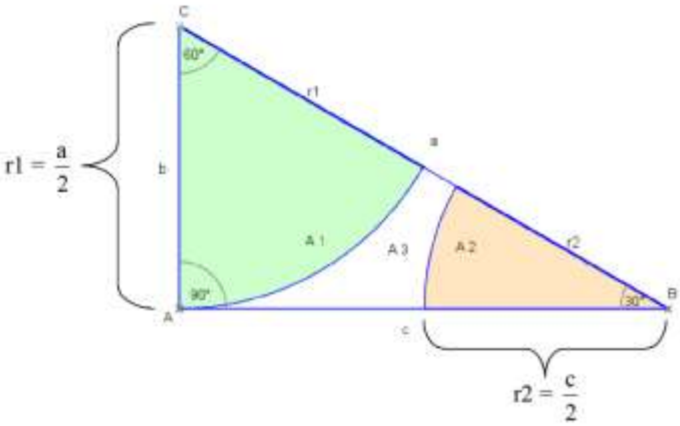
Antwort: Die Seitenlänge des Zwölfecks ist $\underline{\underline{\sqrt{2-\sqrt{3}}\; r}}$.

4)

Flächenformel für ein Kreisbogensegment: $A_S = \frac{\alpha}{360°} * \pi * r^2$

$$A_1 = \frac{60°}{360°} * \pi * \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{6} * \pi * \frac{a^2}{4} = \frac{\pi}{6} * \frac{a^2}{4} = \underline{\underline{\frac{\pi}{24} a^2}}$$

Um A_2 auszurechnen brauchen wir erst den Radius in Abhängigkeit zu a !



$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + c^2$$

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + c^2 \quad \Big| - \frac{a^2}{4}$$

$$c^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} a^2 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$c = \frac{\sqrt{3}}{2} a \quad \Big| : 2$$ (weil r von A_2 nur $\frac{c}{2}$ ist !)

$$\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

$$A_2 = \frac{30}{360} * \pi * \left(\frac{\sqrt{3}}{4} a\right)^2 = \frac{1}{16} * \pi * \frac{3}{16} a^2 = \underline{\underline{\frac{\pi}{64} a^2}}$$

$$A_3 = A_{\Delta ABC} - A_1 - A_2$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} a * \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2$$

$$A_3 = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 - \left(\frac{\pi}{24} a^2 + \frac{\pi}{64} a^2\right)$$

$$A_3 = \left[\frac{\sqrt{3}}{8} - \left(\frac{8}{192} + \frac{3}{192}\right)\pi\right] a^2 = \underline{\underline{\left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{11}{192}\pi\right) a^2}}$$