Übungsarbeit Mathematik

Nr.1

a) Zeige: Es gibt eine arithmetische Folge (a_n) mit $a_5=7$ und $a_{17}=56$.

b) Berechne die Summe 4+11,33+18,66+25,99+…+231,23.

Nr.2

a) Zeige: Es gibt eine geometrische Folge (a_n) mit $a_4=3{,}4$ und $a_{11}=2{,}5$

Hinweis: Runde die Ergebnisse auf 3 Nachkommastellen!

b) Ein Kapital K wird zu einem Zinssatz von 3,4% pro Monat angelegt. Die Zinsen werden monatlich berechnet und am Monatsende dem Kapital hinzugefügt.

Auf welchen Wert ist das Kapital K zu Beginn des [zweiten, dritten, vierten, …] m-ten Monats und zu Beginn des [zweiten, dritten, vierten, …] n-ten Jahres angewachsen?

Nr.3

Untersuche die 2 folgenden Folgen bezüglich Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

b) $a_n = \frac{1-n^2}{1+n}$

Tipp: Berechne einige Folgenglieder!

Nr.4

a) Wann ist eine Folge (a_n) nicht nach unten beschränkt?

b) Wann ist eine Zahl a kein Grenzwert einer Folge (a_n)?

c) Veranschauliche in einer Skizze des Grenzwert a einer Folge (a_n) .

Hinweis: Veranschauliche a, ε , ... in einem Koordinatensystem!

Zur Erinnerung:

Die Zahl a heißt Grenzwert der Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ einen Index N gibt, so dass für alle n>=N gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Nr.5

Sei q eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 (0<q<1).

Zeige, dass die Folge (q^n) monoton fallend ist.

Viel Glück!

Lösungsvorschlag

Nr. 1

a) $a_n = a + (n-1) \cdot d \qquad a_5 = 7 \;,\; a_{17} = 56$

$① \; 7 = a + (5-1) \cdot d \qquad ② \; 56 = a + (17-1) \cdot d$

$\Leftrightarrow 7 = a + 4d \quad | -4d \qquad ② \; 56 = a + 16d$

$\Leftrightarrow a = 7 - 4d \qquad ① \text{ in } ② \quad 56 = 7 - 4d + 16d$

$\Leftrightarrow 56 = 7 + 12d \quad | -7$

$\Leftrightarrow 49 = 12d \quad | :12$

$\Leftrightarrow d = 4\tfrac{1}{12}$

$② \text{ in } ① \quad a = 7 - 4 \cdot 4\tfrac{1}{12}$

$= -9\tfrac{1}{3}$

$\Rightarrow a_n = -9\tfrac{1}{3} + (n-1) \cdot 4\tfrac{1}{12}$

[2]

b) $a_n = a + (n-1) \cdot d \quad$ hier: $a_n = 4 + (n-1) \cdot 7{,}33$

$231{,}23 = 4 + (n-1) \cdot 7{,}33 \quad | -4$

$\Leftrightarrow 227{,}23 = (n-1) \, 7{,}33 \quad | : 7{,}33$

$\Leftrightarrow \frac{227{,}23}{7{,}33} = n - 1 \quad | +1$

$\Leftrightarrow 31 + 1 = n$

$\Leftrightarrow n = 32$

$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a + (n-1) \, d)$

hier: $S_{32} = \frac{32}{2} \cdot (2 \cdot 4 + (32-1) \cdot 7{,}33)$

$= 3763{,}68$

[2]

Nr. 2

a) $a_n = a \cdot q^{n-1}$ $\qquad a_4 = 3{,}4 \quad , \quad a_{11} = 2{,}5$

$$① \; 3{,}4 = a \cdot q^{4-1} \;|: q^{4-1} \qquad ② \; 2{,}5 = a\, q^{11-1}$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3{,}4}{q^3} \qquad ① \text{ in } ② \quad 2{,}5 = \frac{3{,}4}{q^3}\, q^{10} \;|\, q^{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2{,}5}{q^{10}} = \frac{3{,}4}{q^3} \;|\, q^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2{,}5 \cdot q^3}{q^{10}} = 3{,}4$$

$$\Leftrightarrow 2{,}5 \cdot \frac{q^3}{q^{10}} = 3{,}4 \;|\, 2{,}5$$

$$\Leftrightarrow q^{-7} = 1{,}36 \;|\, \sqrt[-7]{\;}$$

$$\Leftrightarrow q \approx 0{,}957$$

$$② \text{ in } ① \quad a = \frac{3{,}4}{0{,}957^3} \approx 3{,}579$$

$$\Rightarrow a_n = 3{,}579 \cdot 0{,}957^{n-1}$$

$\boxed{3}$

b) Kapital zu Beginn des m-ten Monats: $K_m = K \cdot 1{,}034^{m-1}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Kapital zu Beginn des 2. Jahres: } K_{13} = K \cdot 1{,}034^{12} \\ \text{Kapitall zu Beginn des 3. Jahres: } K_{25} = K \cdot 1{,}034^{24} \end{array}\right]$$

Kapital zu Beginn des n-ten Jahres: $K_{12n-11} = K \cdot 1{,}034^{(12n-11)-1}$

$$= K \cdot 1{,}034^{12 \cdot (n-1)}$$

$$= K \cdot (1{,}034^{12})^{n-1}$$

$\boxed{3}$

Nr. 3

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ $\qquad a_{n+1} = \frac{n}{n+2}$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{[n^2+n] - [(n+2)(n-1)]}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{[n^2+n] - [n^2-n+2n-2]}{n^2+n+2n+2}$$

$$= \frac{n^2+n-n^2+n-2n+2}{n^2+n+2n+2}$$

$$= \frac{2}{n^2+3n+2} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n \rightarrow$ strikt monoton

$S = 1$? $\qquad s = 0$?

$S - a_n = 1 - \frac{n-1}{n+1}$ $\qquad s - a_n = 0 - \frac{n-1}{n+1}$

$= \frac{n+1-n+1}{n+1}$ $\qquad = -\frac{n-1}{n+1} \leq 0$

$= \frac{2}{n+1} \geq 0$

$\Rightarrow a_n \leq 1$ $\qquad \Rightarrow a_n \geq 0$

$$\Rightarrow 0 \leq a_n \leq 1$$

Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right) = 1$

Beweis: $|a_n - 1| = \left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n-1-n-1}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1}$

sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben

$\frac{2}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow 2 < \varepsilon \cdot (n+1) \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n+1 \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} - 1 < n$

wähle die auf $\frac{2}{\varepsilon} - 1$ folgende natürliche Zahl als N.

Dann gilt für alle $n \geq N$: $|a_n - 1| = \frac{2}{n+1} < \varepsilon$

$\boxed{6}$

b) $a_n = \frac{1-n^2}{1+n}$ $a_{n+1} = \frac{1-(n+1)^2}{2+n} = \frac{1-(n^2+2n+1)}{2+n} = \frac{-n^2-2n}{2+n}$

① $a_{n+1} - a_n = \frac{-n^2-2n}{2+n} - \frac{1-n^2}{1+n} = \frac{[(-n^2-2n)\cdot(1+n)]-[(2+n)\cdot(1-n^2)]}{(2+n)\cdot(1+n)}$

$= \frac{[-n^2-n^3-2n-2n^2]-[2-2n^2+n-n^3]}{2+2n+n+n^2}$

$= \frac{-n^2-n^3-2n-2n^2-2+2n^2-n+n^3}{2+3n+n^2}$

$= \frac{-n^2-3n-2}{2+3n+n^2} < 0$

$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ (stre) mofa

② $S = 0$? $S = \diagup$!

$S - a_n = 0 - \frac{1-n^2}{1+n}$

$= -\frac{1-n^2}{1+n} \geq 0$

$\Rightarrow a_n \leq 0$

$\Rightarrow$ Die Folge (a_n) ist nach oben beschränkt, nicht jedoch nach unten!

③ Die Folge (a_n) hat keinen Grenzwert, sie divergiert nach $-\infty$.

$\boxed{6}$

Nr. 4

a) Eine Folge ist nicht nach unten beschränkt, wenn es zu jeder noch so großen positiven Zahl $r>0$ ein Folgenglied a_n gibt, mit $a_n > r$.

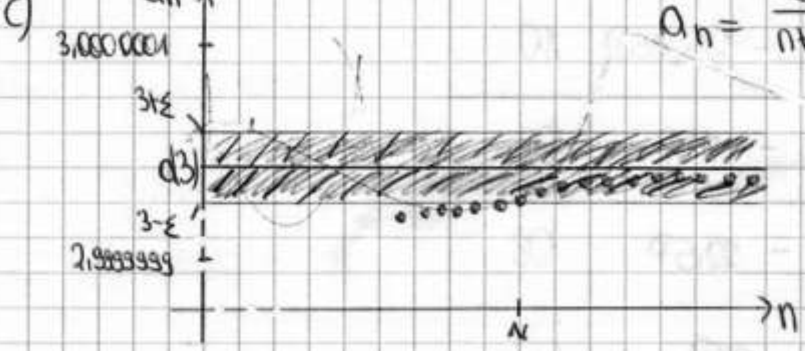
[2]

b) Die Zahl a ist nicht Grenzwert der Folge (a_n), wenn es ein $\varepsilon>0$ gibt, so dass für unendlich viele Folgenglieder $|a_n - a| \geq \varepsilon$ gilt.

[2]

c)

$$a_n = \frac{3n}{n+2}$$



Selbst wenn man nun die Zahl ε immer kleiner wählt gibt es immer einen Index N, ab dem die Folgenglieder sich um weniger als ε, vom Grenzwert 3 unterscheiden

[4]

Nr. 5

$a_n = q^n \qquad a_{n+1} = q^{n+1} \quad // q : 0 < q < 1$

$$a_{n+1} - a_n = q^{n+1} - q^n$$

$$= q^n \cdot q^1 - q^n \cdot 1$$

$$= q^n \cdot \underbrace{(q^1 - 1)}_{<1} < 0$$

je höher n, umso kleiner wird q^n

$$\Rightarrow a_{n+1} - a_n < 0 \Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$$

$$\Rightarrow \text{mofa}$$

[2]

[32]