1.0 Eine Stadt A hat 700 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl nimmt jährlich um 6% zu. (f_1: $y = 700\,000 \cdot 1{,}06^x$)
Die Stadt B hat 500 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl nimmt jährlich um 8% zu. (f_2: $y = 500\,000 \cdot 1{,}08^x$).
Das Wachstum soll die nächsten Jahrzehnte gleich bleiben.

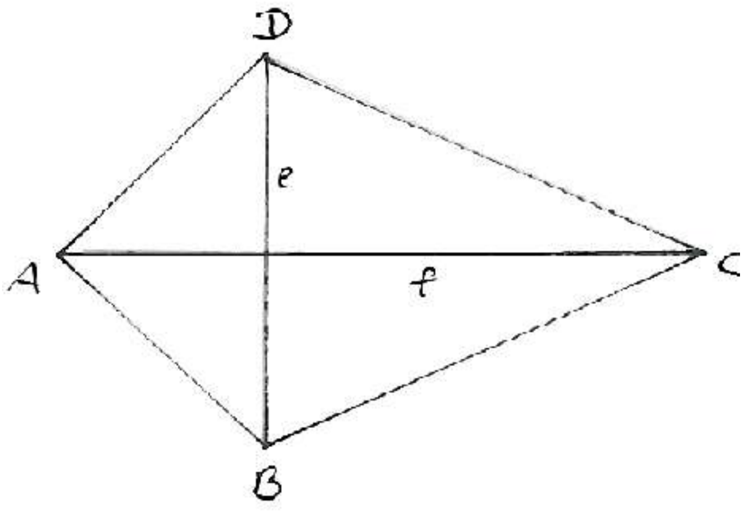
1.1 Nach wie vielen Jahren haben die Städte gleich viele Einwohner?
Löse rechnerisch!

1.2 Wie hoch wäre das Wachstum, wenn die Stadt A in 6 Jahren 800 000 Einwohner hätte?

2.1 Bestimme das Winkelmaß von $\phi \in [\,0\,;\,360°]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
sin < 0,5

2.2 Bestimme das Winkelmaß von $\phi \in [\,0\,;\,90°]$ auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.
$(\sin\phi + \cos\phi)^2 = 1{,}8$

3.0 Von einem Drachenviereck ist $\alpha = 110°$, $\delta = 90°$ und $f = 6$ cm bekannt.
Berechne damit die Länge der Seiten a, b und die Länge der Diagonale e.



4.0 Gegeben ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit der Hypotenuse AB = 8 cm.
Der Punkt M ist der Fußpunkt der Höhe des Dreiecks durch C.

4.1 Zeichne dieses Dreieck ABC für $\beta = 40°$

4.2 Berechne die Streckenlängen $\overline{BC}$ und $\overline{CM}$ in Abhängigkeit von β.

4.3 Nun rotiert das Dreieck um die Achse AB.
Zeige, dass der entstehende Körper folgendes Volumen in Abhängigkeit von β hat: 128

$$V = \frac{128\pi}{3} \cdot \sin^2 \beta$$

4.4 Begründe rechnerisch, für welchen Winkel β das Volumen maximal wird, und gib das maximale Volumen an.

4.5 Berechne den Winkel β, für den das Volumen des Körpers 32π beträgt.

Lösungen zur 2. Schulaufgabe aus der Mathematik

1.0 Eine Stadt A hat 700 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl nimmt jährlich um 6% zu. (f_1: y = 700 000 · $1{,}06^x$)
Die Stadt B hat 500 000 Einwohner. Die Einwohnerzahl nimmt jährlich um 8% zu. (f_2: y = 500 000 · $1{,}08^x$).

1.1 Das Wachstum soll die nächsten Jahrzehnte gleich bleiben.
Nach wie vielen Jahren haben die Städte gleich viele Einwohner?
Löse rechnerisch!
Wenn beide Städte die gleiche Einwohnerzahl haben sollen, muss man die beiden Funktionen f_1 und f_2 gleichsetzen.

$700\,000 \cdot 1{,}06^x = 500\,000 \cdot 1{,}08^x$

$$\frac{700000}{500000} = \frac{1{,}08^x}{1{,}06^x}$$

Potenzen mit gleichem Exponenten kann man zusammenfassen:

$$1{,}4 = \left(\frac{1{,}08}{1{,}06}\right)^x \qquad ;$$

Durch Umwandlung in einen Logarithmus kann man die Gleichung lösen!

$$\log_{\frac{1{,}08}{1{,}06}} 1.4 = x \quad ; \quad \frac{\lg 1{,}4}{\lg 1{,}02} = 18$$

x = 18

<u>Nach 18 Jahren haben die beiden Städte die gleiche Einwohnerzahl</u>.

1.2 Wie hoch wäre das Wachstum, wenn die Stadt A in 6 Jahren 800 000 Einwohner hätte?

$$800000 = 700000 \cdot (1+\frac{x}{100})^6$$

$$\frac{800000}{700000} = \left(1+\frac{x}{100}\right)^6$$

$$1{,}14 = (1+\frac{x}{100})^6 \quad \Big|\ (..)^{\frac{1}{6}} \text{ (6. Wurzel ziehen!)}$$

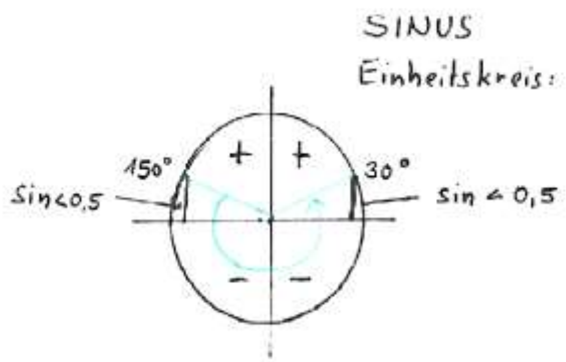
$$1{,}14^{\frac{1}{6}} = 1+\frac{x}{100}$$

$$x = (1{,}14^{\frac{1}{6}} - 1)\cdot 100$$

$$\underline{x = 2{,}21\%}$$

<u>Es wäre ein Wachstum von 2,21%</u>

2.1 Bestimme das Winkelmaß von φ ε [0 ; 360°] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet.



sin < 0,5

Die Sinus-Werte sind im I. und II Quadranten **positiv** und im III. und IV. Quadranten **negativ** deshalb gilt **<u>sin < 0,5</u>** für alle Winkel, die kleiner als 30° und größer als 150° sind

IL = { 30° > φ > 150°}

2.2 Bestimme das Winkelmaß von φ ε [0 ; 90°] auf zwei Stellen nach dem Komma gerundet. **(sin φ + cos φ)² = 1,8**

Unter Anwendung der Additionstheoreme

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ und $2\sin\varphi \cdot \cos\varphi = \sin 2\varphi$ gilt:

$(\sin\varphi + \cos\varphi)^2 = 1{,}8$

$sin^2\varphi + 2\sin\varphi\, cos\varphi + cos^2\varphi = 1{,}8$

$2\sin\varphi\cos\varphi + sin^2\varphi + cos^2\varphi = 1{,}8$

$2\sin\varphi\cos\varphi + 1 = 1{,}8$

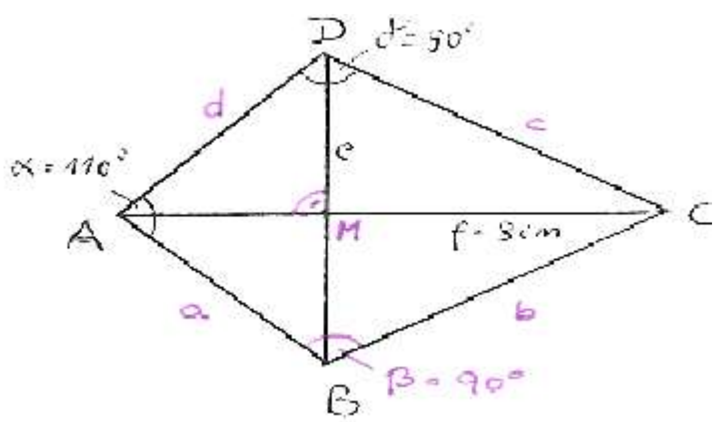
$2\sin\varphi\cos\varphi = 1{,}8 - 1$

$\sin 2\varphi = 0{,}8$

$2\varphi = sin^{-1}0{,}8$

$\varphi = 26{,}57^o$

3.0 Von einem Drachenviereck ist α = 110°, δ = 90° und f = 6 cm bekannt. Berechne damit die Länge der Seiten a, b und die Länge der Diagonale e



Es gilt: **α = 110°, δ = 90°** und **f = 6 cm**
AC = Symmetrieachse, deshalb gilt: **β = δ = 90°**
Winkelsumme im 4-Eck = 360° daher gilt: **γ =** 360° - (110° + 90° +90°) = **70°**

Das Dreieck ABC ist ein rechtwinkliges Dreieck. Damit kann man die trigonometrischen Formel anwenden.

Es gilt: $\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$ $\cos\varphi = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{f}$$

$$b = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot f$$

$$b = \sin 55°\cdot 6cm$$

$$b = 4,91cm$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{f}$$

$$a = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot f$$

$$a = \cos 55°\cdot 6cm$$

$$a = 3,44cm$$

Es sei M der Schnittpunkt der Diagonalen des Drachenvierecks.
Dann gilt für das Dreieck ABM (rechter Winkel bei M):

$$\sin\varphi = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{e/2}{a}$$

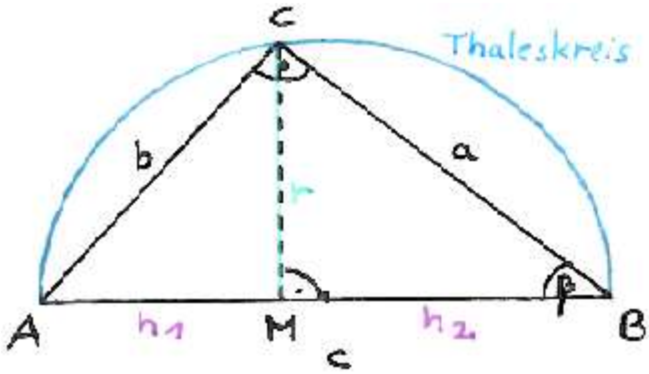
$$\frac{e}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cdot a$$

$$e = 2\cdot\sin 55°\cdot 3,44cm$$

$$e = 5,64cm$$

Somit ergeben sich folgende Werte: a = 3,44 cm
b = 4,91 cm
e = 5,64 cm

4.1 Zeichnen des rechtwinkligen Dreiecks mit $\beta = 40°$



4.2 Berechnung der Streckenlängen BC und CM in Abhängigkeit von β

BC: $\cos\beta = \frac{BC}{AB}$

$BC = \cos\beta \cdot AC$

$BC = \cos\beta \cdot 8cm$

CM: $\sin\beta = \frac{CM}{BC}$

$CM = \sin\beta \cdot BC$

$CM = \sin\beta \cdot \cos\beta \cdot 8cm$

$CM = 4(2\sin\beta \cdot \cos\beta)$

Wegen $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cdot \cos\beta$ gilt:

$CM = \sin 2\beta \cdot 4$

4.3 Volumen der Rotationsfigur

Der durch Rotation entstehende Körper ist ein Doppelkegel

$V_{Kegel} = \frac{1}{3} r^2 \pi h$

$V_{Doppelkegel} = V_1 + V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi h_1 + \frac{1}{3} r^2 \pi h_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \ (h_1 + h_2)$

Es gilt: $h_1 + h_2 = AB = 8$ cm und $r = CM = \sin 2\beta \cdot 4$

$V_{Doppelkegel} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 8$

$= \frac{8}{3}\pi(4 \cdot \sin 2\beta)^2$

$= \frac{8 \cdot 16}{3}\pi \sin^2 2\beta = \frac{128}{3}\pi \sin^2 2\beta$

4.5 Begründe rechnerisch, für welchen Winkel β das Volumen maximal wird, und gib das maximale Volumen an.

$V_{Doppelkegel} = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot 8$

Die einzige Variable in dieser Formel ist der Radius r. Das Volumen wird also am größten werden, wenn r seinen größten Wert annimmt.

Für ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse AB gilt, dass der geometrische Ort aller Punkte C auf dem Thales-Kreis mit dem Durchmesser = AB liegt.
Betrachtet man die Zeichnung unter 4.1, so kann man erkennen, dass die max. Länge von CM gleich dem Radius des Thales-Kreises, also AB/2 = 4 cm ist.
Ist die Strecke CM gleich dem Radius des Thales-Kreises, so haben wir ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel β= 45°

$V_{Doppelkegel} = \frac{128}{3}\pi \sin^2 2\beta$

$= \frac{128}{3}\pi \sin^2 2 \cdot 45°$

$= 133{,}97 \text{ cm}^3$

4.6 Berechne den Winkel β, für den das Volumen des Körpers 32 π beträgt.

$32\pi = \frac{128}{3}\pi \sin^2 2\beta$

$\frac{32\pi \cdot 3}{128 \cdot \pi} = \sin^2 2\beta \quad | \ (..)^{½}$

$\sin 2\beta = \sqrt{\frac{32\pi \cdot 3}{128 \cdot \pi}}$

$\beta = \sin^{-1}(\sqrt{0{,}75}) : 2$

$\beta = 30°$