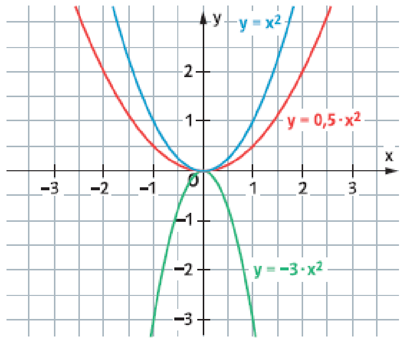
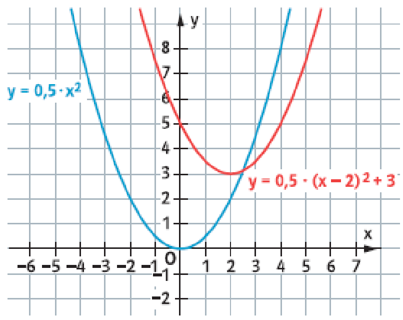
Quadratische Funktionen Arbeitsblatt 1

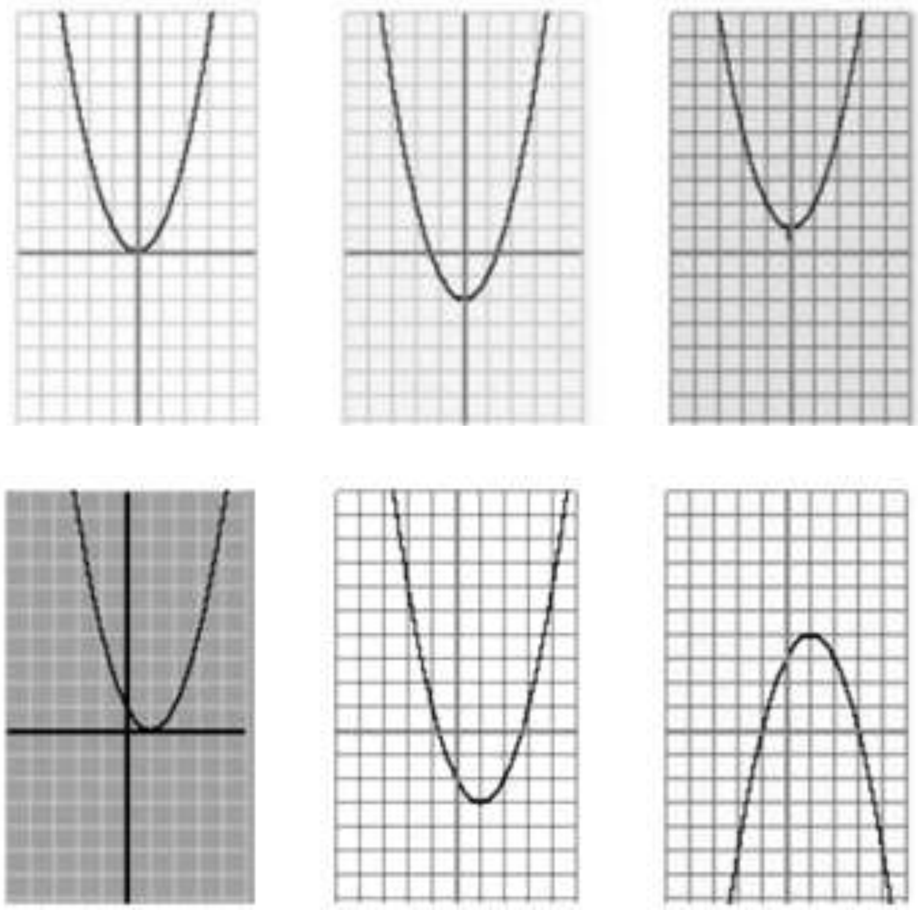
Spezielle quadratische Funktion
Die Funktionsgleichung einer speziellen quadratischen Funktion hat die Form
$y = 3\,x^2$.
Der dazugehörige Graph heißt **Parabel**.
Bei einer speziellen quadratischen Funktion wird dem 2-, 3- bzw. n-fachen der ersten Größe jeweils das 4-, 9- bzw. n^2-fache der zweiten Größe zugeordnet. Die dazugehörige Parabel geht durch den Punkt S (0|0). Dieser Punkt heißt auch **Scheitelpunkt** oder **Scheitel** der Parabel.



Quadratische Funktion
Eine Funktion mit der Gleichung
$f(x) = ax^2 + bx + c$ heißt quadratische Funktion.
Beispiel: **$y = 0{,}5\,(x - 2)^2 + 3$**
Die Parabel der Funktion mit $y = 0{,}5\,(x - 2)^2 + 3$ ist gegenüber dem Graphen der speziellen quadratischen Funktion mit $y = 0{,}5\,x^2$ um 2 nach rechts und um 3 nach oben verschoben; der Scheitel liegt bei S (2|3)



1. Gib zu den Parabeln jeweils eine Funktionsgleichung an



Quadratische Funktionen Arbeitsblatt 2

1. Erstelle eine Wertetabelle für folgende quadratische Funktionsgleichung
   $y = x^2 + x + 1$

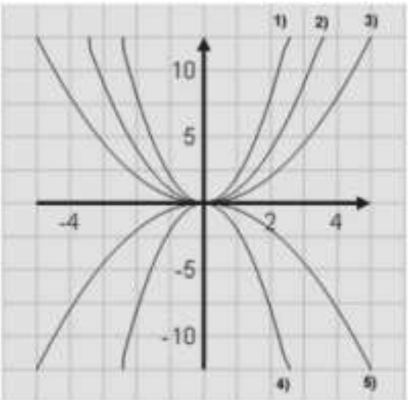
x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y								

2. Um eine verschobene Normalparabel zu zeichnen benötigt man den Scheitelpunkt. Beschreibe, wie man die Parabel auch ohne Schablone zeichnen kann.

   ____

   ____

3. Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen?



$y_1 = x^2$ ________

$y_2 = 2x^2$ ________

$y_3 = 0{,}5x^2$ ________

$y_4 = -0{,}5x^2$ ________

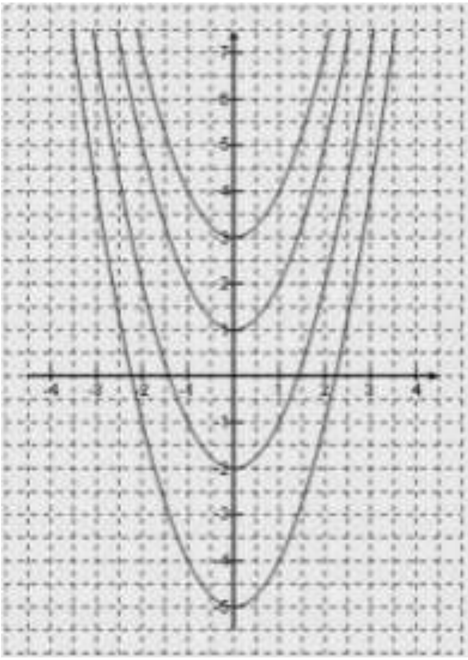
4. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel, nenne Form und Öffnung.
   $y = - x^2 + 3$
   $y = 2\,(x + 1)^2 - 4$
   $y = - 0{,}5\,x^2 - 3x - 2{,}5$
   $y = 0{,}25\,(x - 4)^2$

5. Vergleiche Lage und Form des Graphen der vorliegenden Funktion mit der Normal-parabel. Kreuze an oder trage den entsprechen Wert ein.

Funktionsgleichung	verschoben um ….. nach				nach unten geöffnet	breiter	enger
	rechts	links	oben	unten			
$y = 2(x-3)^2 + 5$	3						
$y = -(x + 6)^2 – 2{,}5$							
$y = -3x^2 + 10$							
$y = 0{,}2x^2 - 5$							
$y = -\frac{1}{3}(x – 6)^2$							
$y = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$							

1a. Lies die Scheitel ab und gib sie als Koordinatenpaar an (von oben nach unten):

f1: _______ f2: _______
f3: _______ f4: _______



b) Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Schaubild?

$f(x) = x^2 - 2$ zu _____
$f(x) = x^2 + 3$ zu _____
$f(x) = x^2 - 5$ zu _____
$f(x) = x^2 + 1$ zu _____

c) Ermittle aus den Funktionsgleichungen den zugehörigen Scheitel.

$f(x) = x^2 - 1{,}5$ _______
$f(x) = x^2 + 2{,}75$ _______
$f(x) = x^2$ ______

d) Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

S (0|3); S (0|-6);
S (0|-1,25); S (0|1,75)

2. Eine nach unten geöffnete Normalparabel verläuft durch die Punkte A(-1|4) und B(4|1).
Zeichne die Parabel.
Berechne ihre Funktionsgleichung.
Berechne den Scheitelpunkt.
Stelle durch Rechnung fest, ob der Punkt C(-5|-30) auf der Parabel liegt.

3. Gib eine passende Funktionsgleichung an. Die Normalparabel ($y = x^2$) wurde

a) um 5 Einheiten nach links [$y = (x + 5)^2$] und um 3 Einheiten nach unten verschoben
[$y = (x + 5)^2$ ___________]

b) mit dem Faktor 4 gestreckt [y = _____], um 3,5 Einheiten nach oben [y = __________]
und um 7 Einheiten nach links verschoben [y = ______________]

c) um _____ Einheiten nach _________ verschoben [$y = (x - 8)^2$] und an der x-Achse gespiegelt [y = ____________]

d) so verschoben, dass der Scheitel im Punkt S (__|__) liegt [$y = (x + 9)^2 - 4$] und sie nach
___________ geöffnet ist [$y = -(x + 9)^2 - 4$]

4. Gib drei verschiedene quadratische Funktionen an, die bei x = 4 die einzige Nullstelle haben.

Gib drei verschiedene quadratische Funktionen an, die die beiden Nullstellen x = -1 und x = 1 haben

1. Bestimme die Funktionsgleichungen

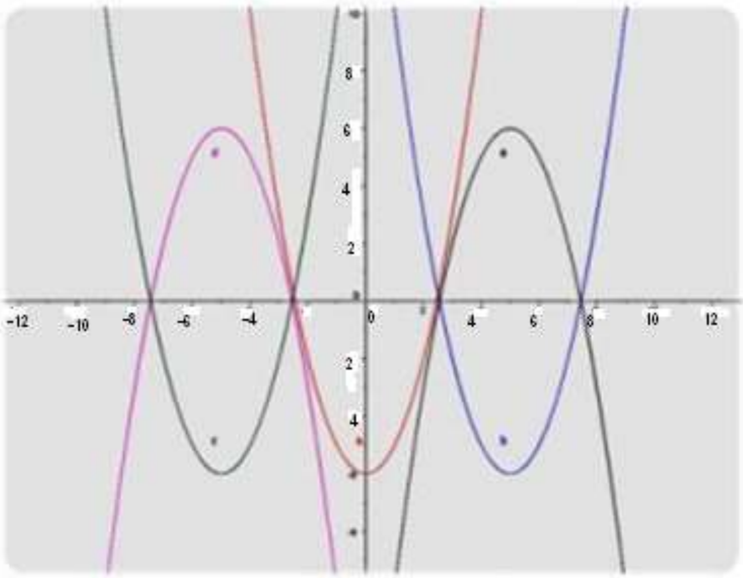
a) ______________

b) ______________

c) ______________

d) ______________

e) ______________



2. Eigenschaften quadratischer Funktionen

a > 0	a < 0
Die Funktion hat einen kleinsten Funktionswert (Minimum). Die Parabel ist nach ______________ geöffnet.	Die Funktion hat einen größten Funktionswert (Maximum). Die Parabel ist nach ________________ geöffnet.
Der Punkt des Graphen, in dem der kleinste bzw. größte Funktionswert angenommen wird heißt _____________________ S der Parabel. Die Parabel ist symmetrisch bezüglich einer Parallelen zur ____________________ durch den Scheitelpunkt S (x_S ; y_S)	
Die Funktion ist monoton fallend für _________________ Sie ist monoton wachsend für _________________	für ______________________ für ______________________
Für den Wertebereich gilt WB = { y ∈ **R** ; ____________ }	WB = { y ∈ **R** ; ____________ }
Eine quadratische Funktion hat höchstens _________________ Nullstellen.	

1. Stelle für jede der drei Funktionen Wertpaare auf und zeichne den Graph der Funktion!
   a) $y = x^2$ b) $y = 3x^2$ c) $y = \frac{1}{3}x^2$

2. Gib zwei mögliche Funktionsgleichungen einer quadratischen Funktion an, die die Bedingung erfüllt.
   a) Die Funktion hat keine Nullstelle.

   b) Der Graph berührt die x-Achse nur bei $x = 2$

   c) Der Graph ist nach unten geöffnet und die beiden Nullstellen sind $x = -2$ und $x = 2$

   d) Die Funktion hat eine Nullstelle bei $x = 3$ und der Graph geht durch $P(2|-2)$

3. Stelle für jede der drei Funktionen Wertpaare auf und zeichne den Graph der Funktion!
   a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + 2$ c) $y = x^2 – 2$

4. Zeichne die quadratischen Funktionen ohne Wertetabelle in ein Koordinatensystem.
   a.) $y = (x + 3,5)^2 - 4$
   b.) $y = - x^2 - 2$
   c.) $y = x^2 - 3x – 4$
   d.) $y = -(x – 4)^2 + 1$
   e.) Berechne die Nullstellen der Funktion aus d.)
   f.) Berechne bei a) den Schnittpunkt mit der y-Achse.

5. Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel, die durch folgende Gleichung gegeben ist:
   $y = x^2 - 2x + 4$ $y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

6. Zeichne den Graph der Funktion mit
   $y = (x – 3)^2 – 1$ $y = x^2 + 2x + 3$

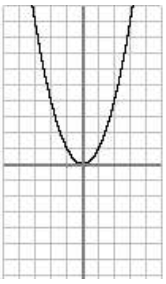
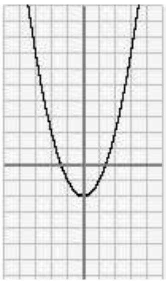
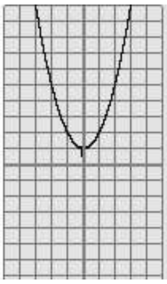
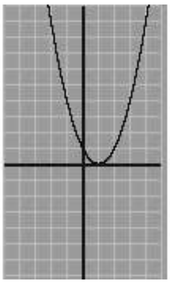
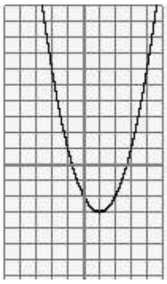
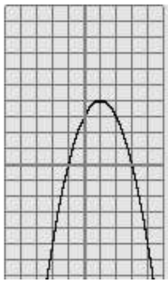
7a. Spiegle die Parabel mit der Gleichung $y = (x + 2)^2 + 1$ an der y-Achse.
Die neue Funktionsgleichung lautet: ______________________

b. Spiegle die Parabel mit der Gleichung $y = (x + 2)^2 + 1$ an der x-Achse.
Die neue Funktionsgleichung lautet: ______________________

Quadratische Funktionen Lösungen 1

1. Gib zu den Parabeln jeweils eine Funktionsgleichung an

$y = x^2$ $y = x^2 - 2$ $y = x^2 + 1$ $y = (x - 1)^2$ $y = (x - 1)^2 - 3$ $y = -(x-1)^2 + 4$

Quadratische Funktionen Lösungen 2

1. Erstelle eine Wertetabelle für folgende quadratische Funktionsgleichung

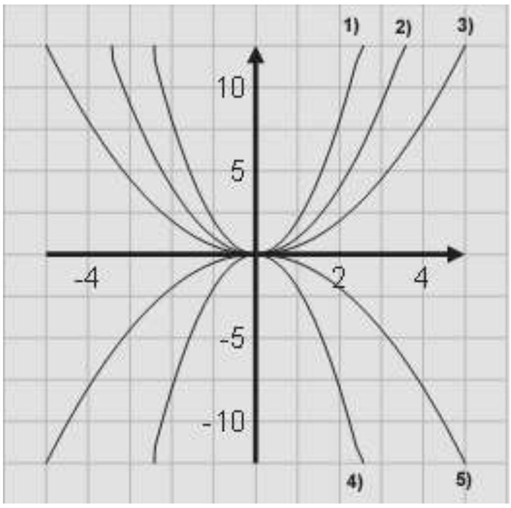
$y = x^2 + x + 1$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	13	7	3	1	1	3	7	13

2. Um eine verschobene Normalparabel zu zeichnen benötigt man den Scheitelpunkt. Beschreibe, wie man die Parabel auch ohne Schablone zeichnen kann.

Bei einer verschobenen Normalparabel geht man vom Scheitelpunkt um eine Einheit nach rechts oder links und dann eine Einheit nach oben und erhält zwei weitere Punkte der Parabel. Anschließend geht man vom Scheitelpunkt zwei Einheiten nach rechts oder links und dann vier Einheiten nach oben und erhält erneut zwei Punkte der Parabel. In gleicher Weise erhält man weitere Punkte. Zum Schluss werden die Punkte zu einer Parabel verbunden.

3. Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Graphen?



$y_1 = x^2$ gehört zu Graph 2

$y_2 = 2x^2$ gehört zu Graph 3

$y_3 = 0{,}5x^2$ gehört zu Graph 1

$y_4 = -0{,}5x^2$ gehört zu Graph 4

4. Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel, nenne Form und Öffnung.

Berechnung des Scheitelpunkts:

$y = - x^2 + 3$ S(0|3), nach unten geöffnete Normalparabel

$y = 2\,(x + 1)^2 - 4$ S(-1|-4), nach oben geöffnete gestreckte Parabel

$y = -0{,}5\,x^2 - 3x - 2{,}5$ $-0{,}5\,(x^2 + 6x + 5) = -0{,}5\,(x^2 + 6x + 9 - 4) = -0{,}5\,(x + 3)^2 + 2$

→ S(-3|2), nach unten geöffnete gestauchte Parabel

$y = 0{,}25\,(x - 4)^2$ S(4|0), nach oben geöffnete gestauchte Parabel

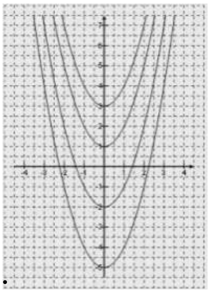
5. Vergleiche Lage und Form des Graphen der vorliegenden Funktion mit der Normalparabel. Kreuze an oder trage den entsprechen Wert ein.

Funktionsgleichung	verschoben um ….. nach rechts	links	oben	unten	nach unten geöffnet	breiter	enger
$y = 2(x - 3)^2 + 5$	3		5				x
$y = -(x + 6)^2 - 2{,}5$		6		2,5	x		
$y = -3x^2 + 10$			10		x		x
$y = 0{,}2x^2 - 5$				5		x	
$y = -\frac{1}{3}(x - 6)^2$	6				x	x	
$y = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$		$\frac{1}{2}$				x	

Quadratische Funktionen Lösungen 3

1a) Lies die Scheitel ab und gib sie als Koordinatenpaar an (von oben nach unten):

f1: S(0|3) f2: S(0|1) f3: S(0|-2) f4: S(0|-5)



b) Welche Funktionsgleichung gehört zu welchem Schaubild?

f(x) $x^2 - 2$ zu f3 f(x) $x^2 + 3$ zu f1

f(x) $x^2 - 5$ zu f4 f(x) $x^2 + 1$ zu f2

c) Ermittle aus den Funktionsgleichungen den zugehörigen Scheitel.

f(x) $x^2 - 1{,}5$ S (0|-1,5)

f(x) $x^2 + 2{,}75$ S (0|2,75)

f(x) x^2 S (0|0)

d) Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

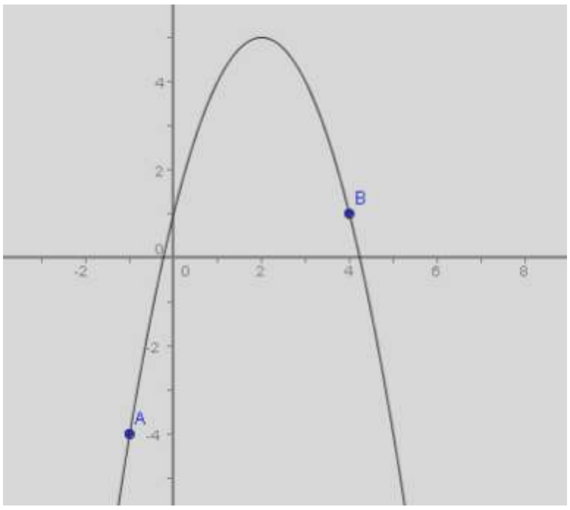
S (0|3); $y = x^2 + 3$ S (0|-6); $y = x^2 - 6$

S (0|-1,25); $y = x^2 - 1{,}25$ S (0|1,75) $y = x^2 + 1{,}75$

2. Eine nach unten geöffnete Normalparabel verläuft durch die Punkte A(-1|4) und B(4|1).

Zeichne die Parabel.

Berechne ihre Funktionsgleichung.



p: $y = -x^2 + bx + c$

A(-1|-4) $\in$ p → $-4 = -1 - b + c$

B(4|1) $\in$ p → $1 = -16 + 4b + c$ → $5 = -15 + 5b$

→ b = 4 → c = 1

→ p: $y = -x^2 + 4x + 1$

Berechne den Scheitelpunkt.

$y = -x^2 + 4x + 1$

$y = -[x^2 - 4x - 1]$

$y = -[(x-2)^2 - 4 - 1]$
$y = -(x-2)^2 + 5 \rightarrow S(2|5)$
Stelle durch Rechnung fest, ob der Punkt C(-5|-30) auf der Parabel liegt.
C(-5|-30)
$y = -(x-2)^2 + 5$
$-30 = -(-5-2)^2 + 5$
$-30 = -49 + 5$
$-30 = -44 \quad \rightarrow C \notin p$

3. Gib eine passende Funktionsgleichung an. Die Normalparabel ($y = x^2$) wurde
a) um 5 Einheiten nach links [$y = (x + 5)^2$] und um 3 Einheiten nach unten verschoben [$y = (x + 5)^2 - 3$]
b) mit dem Faktor 4 gestreckt [$y = 4x^2$], um 3,5 Einheiten nach oben [$y = 4x^2 + 3{,}5$] und um 7 Einheiten nach links verschoben [$y = 4(x + 7)^2 + 3{,}5$]
c) um 8 Einheiten nach rechts verschoben [$y = (x - 8)^2$] und an der x-Achse gespiegelt [$y = -(x - 8)^2$]
d) so verschoben, dass der Scheitel im Punkt S (-9|-4) liegt [$y = (x + 9)^2 - 4$] und sie nach unten geöffnet ist [$y = -(x + 9)^2 - 4$]

4. Gib drei verschiedene quadratische Funktionen an, die bei x = 4 die einzige Nullstelle haben.
$y = (4 - 4)^2$; $y = 2(x - 4)^2$; $y = -(x - 4)^2$
Gib drei verschiedene quadratische Funktionen an, die die beiden Nullstellen x = -1 und x = 1 haben
$y = x^2 - 1$; $y = -x^2 + 1$; $y = 2x^2 - 2$

Quadratische Funktionen Lösungen 4

1. Bestimme die Funktionsgleichungen
a) $y = x^2 - 6$ b) $y = (x - 5)^2 - 6$ c) $y = (x + 5)^2 - 6$
d) $y = -(x + 5)^2 + 6$ e) $y = -(x - 5)^2 + 6$

2. Eigenschaften quadratischer Funktionen

a > 0	a < 0
Die Funktion hat einen kleinsten Funktionswert (Minimum). Die Parabel ist nach oben geöffnet.	Die Funktion hat einen größten Funktionswert (Maximum). Die Parabel ist nach unten geöffnet.
Der Punkt des Graphen, in dem der kleinste bzw. größte Funktionswert angenommen wird heißt Scheitelpunkt S der Parabel. Die Parabel ist symmetrisch bezüglich einer Parallelen zur y-Achse durch den Scheitelpunkt S (x_S ; y_S)	
Die Funktion ist monoton fallend für $x < x_S$	für $x > x_S$
Sie ist monoton wachsend für $x > x_S$	für $x < x_S$
Für den Wertebereich gilt WB = { $y \in \mathbf{R}$; $y \geq y_S$ }	WB = { $y \in \mathbf{R}$; $y \leq y_S$ }
Eine quadratische Funktion hat höchstens zwei Nullstellen.	

1. Stelle für jede der drei Funktionen Wertpaare auf und zeichne den Graph der Funktion!

a) $y = x^2$ b) $y = 3x^2$ c) $y = \frac{1}{3}x^2$

a)

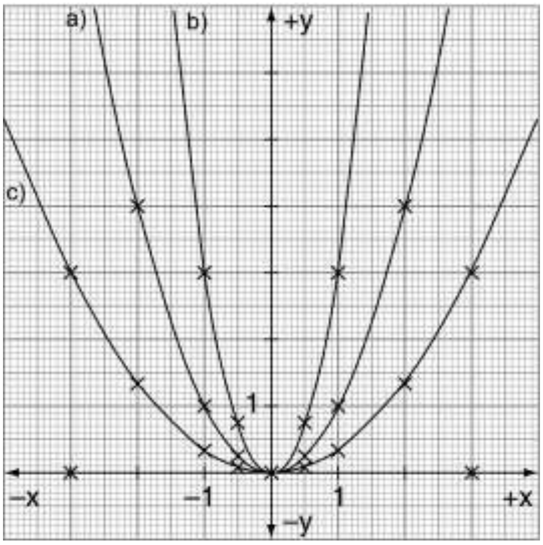
x	y
–3	9
–2	4
–1	1
–0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
2	4
3	9

b)

x	y
–2	12
–1	3
–0,5	0,75
0	0
0,5	0,75
1	3
2	12

c)

x	y
–3	3
–2	1,33
–1	0,33
–0,5	0,08
0	0
0,5	0,08
1	0,33
2	1,33
3	3



2. Gib zwei mögliche Funktionsgleichungen einer quadratischen Funktion an, die die Bedingung erfüllt.

a) Die Funktion hat keine Nullstelle.

$y = x^2 + 1$ oder $y = x^2 + 3$ bzw. $y = ax^2 + c$ (a und c müssen positive Zahlen sein)

b) Der Graph berührt die x-Achse nur bei x = 2

$y = (x – 2)^2$ oder $y = -2(x – 2)^2$ bzw. $y = a(x – 2)^2$ (mit beliebigem a)

c) Der Graph ist nach unten geöffnet und die beiden Nullstellen sind x = -2 und x = 2

$y = -(x – 2) \cdot (x - 2) = -x^2 + 4$ oder $y = y = -2 (x + 2) \cdot (x – 2) = -2x^2 + 8$

d) Die Funktion hat eine Nullstelle bei x = 3 und der Graph geht durch P(2|-2)

$y = (x – 2)^2 – 1$ oder $y = -(x – 3)^2$

3. Stelle für jede der drei Funktionen Wertpaare auf und zeichne den Graph der Funktion!

a) $y = x^2$ b) $y = x^2 + 2$ c) $y = x^2 – 2$

a)

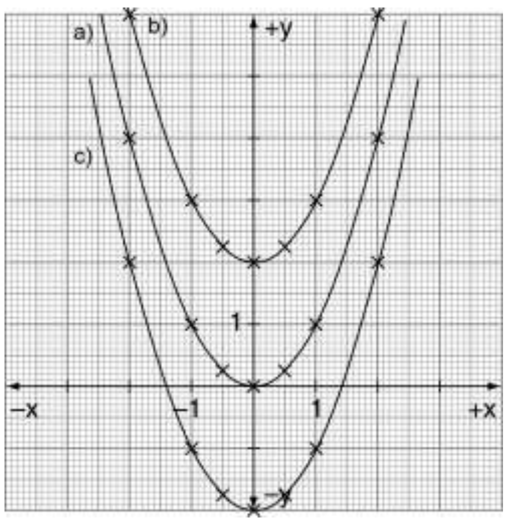
x	y
–3	9
–2	4
–1	1
–0,5	0,25
0	0
0,5	0,25
1	1
2	4
3	9

b)

x	y
–2	6
–1	3
–0,5	2,25
0	2
0,5	2,25
1	3
2	6

c)

x	y
–3	7
–2	2
–1	–1
–0,5	–1,75
0	–2
0,5	–1,75
1	–1
2	2
3	7



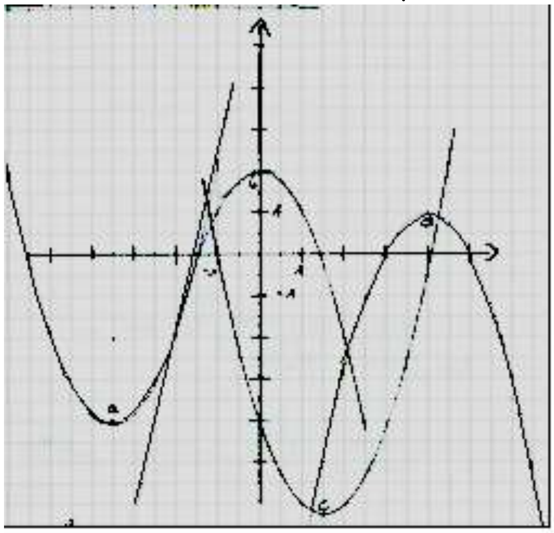
4. Zeichne die quadratischen Funktionen ohne Wertetabelle in ein Koordinatensystem.

a) $y = (x + 3{,}5)^2 - 4$ S (-3,5|-4)

b) $y = -x^2 - 2$ S (0|-2)

c) $y = x^2 - 3x - 4$ S (1,5|-6,25)

d) $y = -(x - 4)^2 + 1$ S (4|1)



e) Berechne die Nullstellen der Funktion d)

Nullstellen von d): $x_1 = 5$; $x_2 = 3$

Nullstellenberechnung mit der pq-Formel:
$(y = x^2 + px + q)$
$y = -(x - 4)^2 + 1$
$y = -[x^2 - 8x + 16] + 1$
$y = -x^2 + 8x - 15$
$y = (-1)(x^2 - 8x + 15)$ $p = -8$; $q = 15$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = \frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 15}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{16 - 15}$$

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{1}$$ $x_1 = 5$; $x_2 = 3$

f) Berechne bei a) den Schnittpunkt mit der y-Achse.

$y = (0 + 3{,}5)^2 - 4$
$y = 12{,}25 - 4$
$y = 8{,}25$

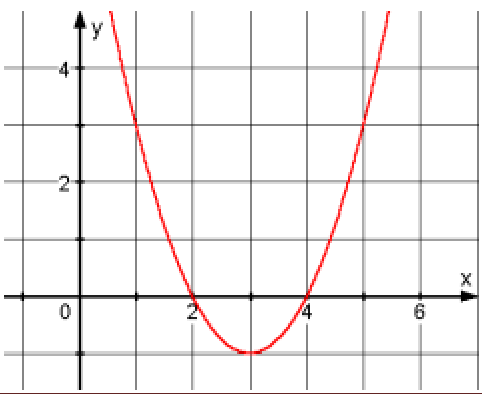
5. Ermittle rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunkts der Parabel, die durch folgende Gleichung gegeben ist:

$y = x^2 - 2x + 4$
$y = x^2 - 2x + 1 - 1 + 4$
$y = (x - 1)^2 + 3$
S = (1|3)

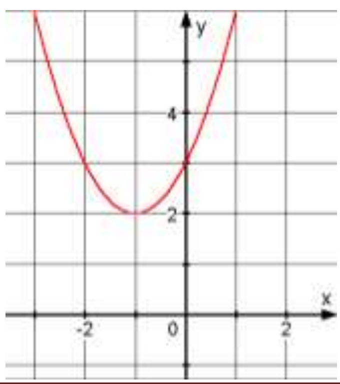
$y = -\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 3)$
$y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x + 1 - 1 + 3)$
$y = -\frac{1}{2}\ [(x + 1)^2 + 2]$
$y = -\frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$
S = (-1|-1)

6. Zeichne den Graph der Funktion mit

$y = (x - 3)^2 - 1$



$y = x^2 + 2x + 3$
$y = x^2 + 2x + 1 - 1 + 3$
$y = (x + 1)^2 + 2$



7a. Spiegle die Parabel mit der Gleichung $y = (x + 2)^2 + 1$ an der y-Achse.
Die neue Funktionsgleichung lautet: $y = (x - 2)^2 + 1$

b. Spiegle die Parabel mit der Gleichung $y = (x + 2)^2 + 1$ an der x-Achse.
Die neue Funktionsgleichung lautet: $y = -(x + 2)^2 - 1$