1. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x} = 9$

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$

c) $\sqrt{x} = \frac{2}{3}$

d) $4 \cdot \sqrt{3x} = 12$

e) $\sqrt{x+5} = 3$

f) $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{2x} = \frac{8}{5}$

g) $3 \cdot \sqrt{x+5} - 2 \cdot \sqrt{x+5} = 6$

h) $\sqrt{12-x} = 2$

i) $\frac{2}{\sqrt{3x+19}} = \frac{1}{4}$

j) $5 \cdot \sqrt{x-2} - 3 \cdot \sqrt{x-2} = 6$

k) $x + \sqrt{x^2+21} = 3$

l) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+13}} = 1$

2. Berechne die Gleichungen

a) $\sqrt{x+6} = 3$

b) $\sqrt[4]{x-1} = 2$

c) $\sqrt{x-1} = 5$

d) $\sqrt{x+4} = 8$

e) $\sqrt{x+30} = 36\sqrt{(x-5)} =$

f) $\sqrt[3]{x+200} = 2 \cdot \sqrt[3]{x+11}$

g) $6\sqrt{x-50} = \sqrt{x-15}$

h) $3\sqrt[3]{x-10} = \sqrt[3]{x+198}$

3. Berechnen die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

a) $\sqrt{x-2} - 7 = \sqrt{x+5}$

b) $\sqrt{2x+1} = 1 - x$

c) $\sqrt{4-3x} = \sqrt{2x-6}$

d) $\sqrt{6x+4} = \sqrt{4x-4}$

e) $2x - 2{,}5\sqrt{1-x^2} = 0{,}6$

f) $x\sqrt{x} = 0{,}125$

4. Löse die Wurzelgleichungen

a) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{81x-18} = \sqrt{125x-25}$

b) $\sqrt{-26x^2+70+37x} = 4+5x$

c) $\sqrt{7+x} - 3\sqrt{x-4} = \sqrt{x-28}$

d) $\sqrt{x} = x+1$

e) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 5$

f) $\sqrt{6-0{,}625x} - \sqrt{29-3{,}5x} = 1$

g) $\sqrt{2x+3} - 1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x+1}$

h) $2 \cdot \sqrt{7-x} - 3 = \sqrt{13+2x}$

5. Die Gleichung $\sqrt{x^2+1} + b = 0$ hat für b > 0 keine Lösung.
Für welche Wahl von b hat die Gleichung genau eine Lösung?

6. Für welche Werte von t gilt: $\frac{3}{4}t\sqrt{\frac{t}{3}} \cdot \left(-\frac{4}{3}t\sqrt{\frac{t}{3}}\right) = -1$

Wurzelgleichungen Station 2

1. Berechne die Gleichung und stelle die Lösung grafisch dar

a) $x^2 + \sqrt[3]{x} = 4$

b) $x^3 - \sqrt[4]{x} = 1$

c) $x^4 = \sqrt[3]{x+1} = 1$

d) $(x-1)^2 = \sqrt[3]{x}$

2. Berechne die Lösungsmenge

a) $x^2 + \sqrt{3}x + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}$

b) $57x^2 + \sqrt{2}x + 7 = 0 =$

c) $10x \cdot (x+3) = 2 \cdot (3x+7) \cdot (x+3) - 4 \cdot (3x+3)$

3. Gib den maximalen Definitionsbereich an und berechne die Lösungsmenge

$\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}$

4. Löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x+17} = 2\sqrt{x-10}$

b) $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+13}$

c) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + 3 = 0$

d) $\sqrt{x-3} + 1 = \sqrt{x+2}$

e) $\sqrt{x+33} = \sqrt{x-2} + 5$

f) $\sqrt{x-10} + \sqrt{x+10} = 10$

5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen! Lege vorher die Definitionsmenge fest!

a) $\sqrt{2x-1} = 3$

b) $1 = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$

c) $\sqrt{x^2+1} - 2 = 0$

d) $\sqrt{3+x^2} + 8 = 0$

e) $3\sqrt{1-x} = 12$

f) $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{5}$

g) $\sqrt{16-x^2} - 2 = 0 =$

h) $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}} = 5$

6. Löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x+5} - \sqrt{4x+1} = \sqrt{9x+4}$

b) $\sqrt{25x+1} = \sqrt{9x-1} + \sqrt{4x+2}$

c) $\sqrt{45x-1} = \sqrt{5x-2} + \sqrt{20x+3}$

d) $\sqrt{4x+5} = \sqrt{x+7} - \sqrt{x}$

e) $3\sqrt{2x-6} = 2\sqrt{3x-6}$

f) $\sqrt{x+5} + 1 = \sqrt{x+12}$

g) $\sqrt{2x-4} = 2 + \sqrt{2x+8}$

1. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und löse die Gleichungen

a) $15 \cdot \sqrt{3x+9} = 10 \cdot \sqrt{8x+9}$

b) $\sqrt{x+5} = \sqrt{x+1}$

c) $4 \cdot \sqrt{x-1} = 3 \cdot \sqrt{x+6}$

d) $8 - \sqrt{x} = \sqrt{x-16}$

e) $\frac{6}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{x-4}}$

f) $\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2}$

2. Löse die 2 Gleichungen

a) $\sqrt{4x+17} + 2\sqrt{x+1} = 13$

b) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{2x+29} = \sqrt{2x-16} - \sqrt{2x+5}$

3. Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen
Gib dabei den Definitionsbereich an und zeige die Lösung grafisch

a) $x + 2 - \sqrt{4-x} = x$

b) $\sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2$

c) $\sqrt{3x+1} - x + 3 = 0$

d) $x = \sqrt{-x+12}$

4. Berechne die Lösungsmenge

a) $x^2 + \sqrt{5}x + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$

b) $43x^2 + \sqrt{3}x + 8 = 0 =$

c) $10x \cdot (x+4) = 2 \cdot (3x+7) \cdot (x+2) - 4 \cdot (3x+7)$

5. Löse die Gleichungen

a) $2x + \sqrt{25 - x^2} = 0$

b) $2 - \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = 0$

c) $\sqrt{4x^2 + x - 2} + 1 = 2x$

d) $\sqrt{3x+4} + \sqrt{4x-7} = 7$

6. Löse folgende Gleichungen

a) $\sqrt[3]{x} = 5$

b) $\sqrt[4]{x-2} = \frac{3}{2}$

c) $2 - \sqrt[3]{x^2+5} = 6 - 7$

d) $\sqrt[3]{x} = \sqrt[6]{2x}$

e) $\sqrt{3x} - \sqrt[3]{2x^2} = 0$

f) $x \cdot \sqrt[3]{x} - 2{,}5 \cdot \sqrt[3]{x^2} = 1{,}5$

g) $\sqrt[5]{x} - 1 = \frac{1}{4 \cdot \sqrt[5]{x}}$

h) $\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} = 1$

i) $\sqrt[3]{5x} + \frac{3}{\sqrt[3]{5x}} = 2\sqrt{3}$

j) $\sqrt[3]{x^2} = 0{,}25$

k) $\sqrt[5]{x^2 - 8} = 2$

l) $\sqrt[3]{1+x} = \sqrt[6]{x^2} =$

m) $\sqrt[4]{2x} - \sqrt{3x} = 0$

n) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2} = 6$

o) $\sqrt[5]{x^2} - 4 \cdot \sqrt[5]{x} + 4 = 0$

p) $\sqrt[3]{x^2} + 2 = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{x}$

q) $\sqrt{x} - 5\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{x} + 8 = 0$

r) $\sqrt[3]{2x} = 2 \cdot \left(\sqrt[6]{2x} + 1\right)$

7. Gib die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an.

a) $\sqrt{x} = 3$

b) $\sqrt{x+1} = 4$

c) $\sqrt{4x-12} + 3 = 7$

d) $3\sqrt{x-1} = \sqrt{4x+1}$

e) $\sqrt{5x} = \sqrt{4x+9}$

f) $\sqrt{9x+1} = 2\sqrt{2x} + 1$

1. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x} = 9 \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L={81}

b) $\sqrt{x} = \frac{1}{2} \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L=$\left\{\frac{1}{4}\right\}$

c) $\sqrt{x} = \frac{2}{3} \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L=$\left\{\frac{4}{9}\right\}$

d) $4 \cdot \sqrt{3x} = 12 \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L={3}

e) $\sqrt{x+5} = 3 \rightarrow D = \mathbb{R}_+\{x|x \geq -5\}_{\mathbb{R}}$ L={4}

f) $\frac{2}{5} \cdot \sqrt{2x} = \frac{8}{5} \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L={8}

g) $3 \cdot \sqrt{x+5} - 2 \cdot \sqrt{x+5} = 6 \rightarrow D = \mathbb{R}_+\{x|x \geq -5\}_{\mathbb{R}}$ L={31}

h) $\sqrt{12-x} = 2 \rightarrow D = \{x|x \leq 12\}_{\mathbb{R}}$ L={8}

i) $\frac{2}{\sqrt{3x+19}} = \frac{1}{4} \rightarrow D = \{x|x \geq -\frac{19}{3}\}_{\mathbb{R}}$ L={15}

j) $5 \cdot \sqrt{x-2} - 3 \cdot \sqrt{x-2} = 6 \rightarrow D = \{x|x \geq -2\}_{\mathbb{R}}$ L={11}

k) $x + \sqrt{x^2+21} = 3 \rightarrow D = \mathbb{R}$ L={−2}

l) $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+13}} = 1 \rightarrow D = \mathbb{R}$ L={6}

2. Berechne die Gleichungen

a) $\sqrt{x+6} = 3 \leftrightarrow x+6 = 9 \leftrightarrow x = 3$

b) $\sqrt[4]{x-1} = 2 \leftrightarrow x-1 = 2^4 \leftrightarrow x = 17$

c) $\sqrt{x-1} = 5 \leftrightarrow x-1 = 25 \leftrightarrow x = 26$

d) $\sqrt{x+4} = 8 \leftrightarrow x+4 = 64 \leftrightarrow x = 60$

e) $\sqrt{x+30} = 36\sqrt{(x-5)} =\leftrightarrow \sqrt{x+30} = 36\sqrt{x-5} \leftrightarrow x+30 = 36(x-5) \leftrightarrow$
$x+30 = 36x-180 \leftrightarrow x+210 = 36x \leftrightarrow 210 = 35x \leftrightarrow x = \frac{210}{3} \leftrightarrow x = 6$

f) $\sqrt[3]{x+200} = 2 \cdot \sqrt[3]{x+11} \leftrightarrow x+200 = 8 \cdot (x+11) \leftrightarrow x+200 = 8x+88 \leftrightarrow 200 = 7x+88 \leftrightarrow 112 = 7x \leftrightarrow x = 16$

g) $6\sqrt{x-50} = \sqrt{x-15} \leftrightarrow 36(x-50) = x-15 \leftrightarrow 36x = x+1785 \leftrightarrow 35x = 1785 \leftrightarrow x = \frac{1785}{35} \leftrightarrow x = 51$

h) $3\sqrt[3]{x-10} = \sqrt[3]{x+198} \leftrightarrow 27(x-10) = x+198 \leftrightarrow 27x = x+468 \leftrightarrow 26x = 468 \leftrightarrow x = \frac{468}{26} \leftrightarrow x = 18$

3. Berechnen die Definitionsmenge und die Lösungsmenge.

a) $\sqrt{x-2} - 7 = \sqrt{x+5} \rightarrow D = \{x|x \geq 2\}_{\mathbb{R}}$ L= Ø

b) $\sqrt{2x+1} = 1-x \rightarrow D = \{x|x \geq -0{,}5\}_{\mathbb{R}}$ L= 0

c) $\sqrt{4-3x} = \sqrt{2x-6} \rightarrow D = \{x|x \geq 3 \wedge x \leq 2\}_{\mathbb{R}}$ L= Ø

d) $\sqrt{6x+4} = \sqrt{4x-4} \rightarrow D = \{x|x \geq 1\}_{\mathbb{R}}$ L= Ø

e) $2x - 2{,}5\sqrt{1-x^2} = 0{,}6 \rightarrow D = \{x| -1 \leq x \leq 1\}_{\mathbb{R}}$ L= Ø

f) $x\sqrt{x} = 0{,}125 \rightarrow D = \mathbb{R}_+$ L= {0,25}

4. Löse die Wurzelgleichungen

a) $\sqrt{4x+1} + \sqrt{81x-18} = \sqrt{125x-25} \leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{81x-18} = 20x-4 \leftrightarrow$ 70x²-109x+34=0↔
$x_1 = 2 \quad x_2 = 0{,}22$ D={x|x≥ 0,22} L={2;0,22}

b) $\sqrt{-26x^2+70+37x} = 4+5x \leftrightarrow -51x^2 - 3x + 54 = 0 \leftrightarrow x_1 = -1{,}06 \quad x_2 = 1 \leftrightarrow$
D= {x|x≤ −1,0769 ∪ x ≥ 2,5} L={1}

c) $\sqrt{7+x} - 3\sqrt{x-4} = \sqrt{x-28} \leftrightarrow 0{,}25x^2 - x - 3 = 0 \quad x_1 = 6 \quad x_2 = -2$ D=$\{x| -6{,}5 \leq x \leq 7\}$ L={6}

d) $\sqrt{x} = x+1 \leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$ D=x|$x \geq 0\}$ L={ }

e) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = 5 \leftrightarrow 1 + x = 5\sqrt{x} \leftrightarrow x^2 - 23x + 1 = 0 \leftrightarrow \quad x_1 = 22{,}96 \quad x_2 = 0{,}044$ D={x|$x > 0\}$ L={1}

f) $2 \cdot \sqrt{6-0{,}625x} - \sqrt{29-3{,}5x} = 1 \leftrightarrow 2 \cdot \sqrt{6-0{,}625x} = 1 + \sqrt{29-3{,}5x} \leftrightarrow x^2 - 23x + 1 = 0 \leftrightarrow$
$x_1 = 22{,}96 \quad x_2 = 0{,}044$ D={x|$x \leq 8\frac{2}{7}\}$ L={8}

g) $\sqrt{2x+3} - 1 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{x+1} \leftrightarrow \sqrt{2x+3} - 1 = \sqrt{3x+3} \leftrightarrow -x+1 = 2 \cdot \sqrt{2x+3} \leftrightarrow$
x²-10x-11=0 $x_1 = 11 \quad x_2 = -1$ D=x|$x \geq -1\}$ L={-1}

h) $2 \cdot \sqrt{7-x} - 3 = \sqrt{13+2x} \leftrightarrow 0{,}25x^2 - x - 3 = 0 \quad x_1 = 6 \quad x_2 = -2$
D=x|$-6{,}5 \leq x \leq -7\}$ L={6}

5. Die Gleichung $\sqrt{x^2+1} + b = 0$ hat für b > 0 keine Lösung.
Für welche Wahl von b hat die Gleichung genau eine Lösung?

$\sqrt{x^2+1}$=-6 hat keine Lösung für b>0; hat genau 1 Lösung für b = -1

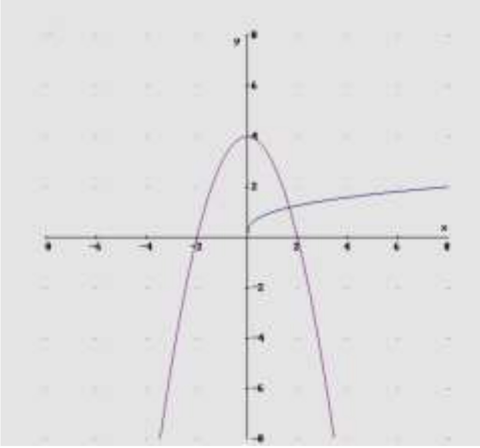
6. Für welche Werte von t gilt: $\frac{3}{4}t\sqrt{\frac{t}{3}} \cdot \left(-\frac{4}{3}t\sqrt{\frac{t}{3}}\right) = -1$

$$t = \sqrt[3]{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{4} \approx 1{,}19$$

1. Berechne die Gleichung und stelle die Lösung grafisch dar

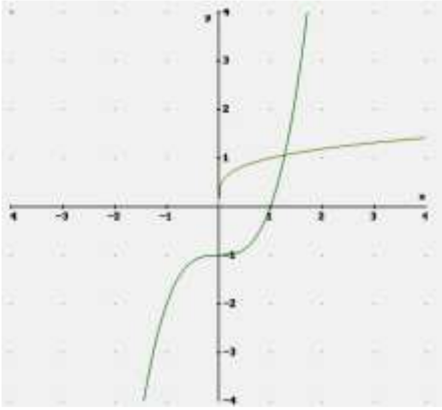
a) $x^2 + \sqrt[3]{x} = 4$

$\leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 4 - x^2 \leftrightarrow x = 1{,}67688708$



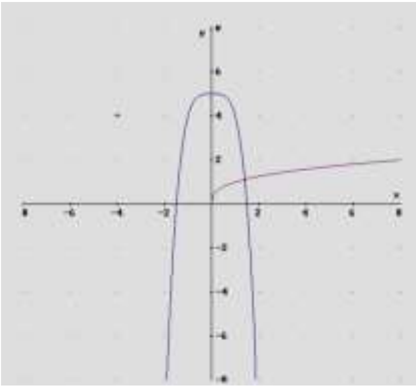
b) $x^3 - \sqrt[4]{x} = 1$

$\leftrightarrow x^3 - 1 = \sqrt[4]{x} \leftrightarrow x = 1{,}27284277$



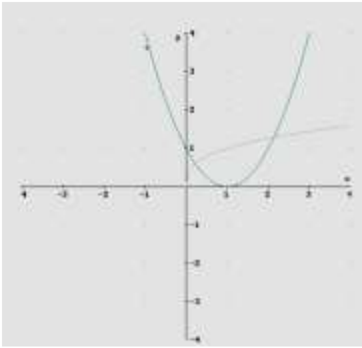
c) $x^4 = \sqrt[3]{x+1} = 1$

$\leftrightarrow \sqrt[3]{x} = 5 - x^4 \leftrightarrow x = 1{,}40351936..$



d) $(x-1)^2 = \sqrt[3]{x}$

$\leftrightarrow \quad x_1 = 0{,}221910401.. \quad x_2 = 2{,}13472413.$



2. Berechne die Lösungsmenge

a) $x^2 + \sqrt{3}x + \frac{7}{2} = \frac{7}{2} \leftrightarrow x^2 + \sqrt{3}x = 0 \leftrightarrow x \cdot (x+3) = 0 \leftrightarrow x = -\sqrt{3} \quad \vee \quad x = 0$

$L = \{0; -\sqrt{3}\}$

b) $57x^2 + \sqrt{2}x + 7 = 0 = \leftrightarrow x^2 + \frac{\sqrt{2}}{57}x + \frac{7}{57} = 0 \leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{\sqrt{2}}{114} \pm \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{114}\right)^2 - \frac{7}{57}}$

Es gilt $\left(-\frac{\sqrt{2}}{114}\right)^2 - \frac{7}{57} \approx -0{,}12 < 0. Also\ L = \{\,\}$

c) $10x \cdot (x+3) = 2 \cdot (3x+7) \cdot (x+3) - 4 \cdot (3x+3) \leftrightarrow 10x^2 + 30x = 6x^2 + 18x + \quad 14x + 42 - 12x - 28 \leftrightarrow 4x^2 + 10x - 14 = 0 \leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{7}{2} = 0 \leftrightarrow$

$x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{7}{2}} \leftrightarrow x_{1/2} = -\frac{5}{4} \pm \frac{9}{4} \leftrightarrow \boldsymbol{x_1} = 1 \vee \boldsymbol{x_2} = -\frac{7}{2}$ L=$\left\{1; -\frac{7}{2}\right\}$

3. Gib den maximalen Definitionsbereich an und berechne die Lösungsmenge

$\sqrt{x-5} + \sqrt{x+3} = \sqrt{2x+4}$

Definintionsbereich: D={$x \in \mathbb{R} \mid x \geq 5$}{1}

$\leftrightarrow (x-5) + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x+3} + (x+3) = 2x + 4 \leftrightarrow 2\sqrt{x-5}\sqrt{x+3} = 6 \leftrightarrow$

$\sqrt{(x-5)(x+3)} = 3 \leftrightarrow (x-5)(x+3) = 9 \leftrightarrow x^2 - 2x - 24 = 0 \leftrightarrow$

$x_{\frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{1+24} \leftrightarrow \ x_1 = 6 \vee x_2 = -4$

4. Löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x+17} = 2\sqrt{x-10} \leftrightarrow x + 17 = 4(x-10) \leftrightarrow x + 17 = 4x - 40 \leftrightarrow x + 57 = 4x \leftrightarrow 57 = 3x \quad x = 19$

b) $2\sqrt{x+1} = \sqrt{x+13} \leftrightarrow 4(x+1) = x + 13 \leftrightarrow 4x + 4 = x + 13 \leftrightarrow 4x = x + 9 \leftrightarrow 3x = 9 \leftrightarrow x = \frac{9}{3} \leftrightarrow$

$x = 3$

c) $\sqrt{x-4} - \sqrt{x+11} + 3 = 0 \leftrightarrow \sqrt{x-4} + 3 = \sqrt{x+11} \leftrightarrow \left(\sqrt{x-4} + 3\right)^2 = x + 11 \leftrightarrow$

$x - 4 + 2 \cdot 3\sqrt{x-4} + 3^2 = x + 11 \leftrightarrow x + 5 + 6\sqrt{x-4} = x + 11 \leftrightarrow 5 + 6\sqrt{x-4} = 11 \leftrightarrow$

$6\sqrt{x-4} = 6 \leftrightarrow \sqrt{x-4}$=1$\leftrightarrow x - 4 = 1 \leftrightarrow x = 5$

d) $\sqrt{x-3}+1=\sqrt{x+2} \leftrightarrow \left(\sqrt{x-3}+1\right)^2 = x+2 \leftrightarrow x-3+2\cdot 1\cdot\sqrt{x-3}+1^2 = x+\leftrightarrow$
$x-3+2\sqrt{x-3}+1 = x+2 \leftrightarrow -2+2\sqrt{x-3} = 2 \leftrightarrow 2\sqrt{x-3} = 4 \leftrightarrow \sqrt{x-3} = 2 \leftrightarrow x-3 = 4 \leftrightarrow$
$x = 7$

e) $\sqrt{x+33} = \sqrt{x-2}+5 \leftrightarrow x+33 = \left(\sqrt{x-2}+5\right)^2 \leftrightarrow x+33 = x-2+2\cdot 5\cdot\sqrt{x-2}+5^2 \leftrightarrow$
$x+33 = x-2+10\sqrt{x-2}+25 \leftrightarrow x+33 = x+10\sqrt{x-2}+23 \leftrightarrow 33 = 10\sqrt{x-2}+23 \leftrightarrow$
$10 = 10\sqrt{x-2} \leftrightarrow 1 = \sqrt{x-2} \leftrightarrow 1 = x-2 \leftrightarrow x = 3$

f) $\sqrt{x-10}+\sqrt{x+10} = 10 \leftrightarrow \sqrt{x-10} = 10-\sqrt{x+10} \leftrightarrow x-10 = \left(10-\sqrt{x+10}\right)^2 \leftrightarrow$
$x-10 = 10^2-210\cdot\sqrt{x+10}+x+10 \leftrightarrow x-10 = 110-20\cdot\sqrt{x+10}+x \leftrightarrow$
$-10 = 110-20\sqrt{x+10} \leftrightarrow -120 = -20\sqrt{x+10} \leftrightarrow 6 = \sqrt{x+10} \leftrightarrow 36 = x+10 \leftrightarrow x = 26$

5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichungen! Lege vorher die Definitionsmenge fest!

a) $\sqrt{2x-1} = 3$ $\mathrm{D} = \left[\frac{1}{2};+\infty\right[$; L = {5}

b) $1 = \sqrt{\frac{2}{x+1}}$ $\mathrm{D} = \left]-1;+\infty\right[$; L = {1}

c) $\sqrt{x^2+1}-2 = 0$ D = R ; $\mathrm{L} = \left\{\pm\sqrt{3}\right\}$

d) $\sqrt{3+x^2}+8 = 0$ D = R ; L = {}

Quadrieren ist nur erlaubt, wenn auf beiden Seiten der Gleichung nichts negatives steht!

e) $3\sqrt{1-x} = 12$ $D = \left]-\infty; 1\right]$; L = {-15}

f) $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{5}$ D = R_0^+ ; $L = \left\{\frac{1}{74}\right\}$

g) $\sqrt{16-x^2}-2 = 0 =$ D=$[-4; 4]$; $L = \left\{\pm 2\sqrt{3}\right\}$

h) $\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x+1}} = 5$ D = R_0^+ ; L = {}, weil $-\frac{25}{22} \notin D$!!

6. Löse die Gleichungen

a) $\sqrt{x+5}-\sqrt{4x+1} = \sqrt{9x+4} \leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}-\sqrt{4x+1}\right)^2 = 9x+4 \leftrightarrow x+5-2\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{4x+1}+4x+1$
$= 9x+4 \leftrightarrow 5x+6-2\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{4x+1}+4x+1 = 9x+4 \leftrightarrow 2-4x = 2\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{4x+1} \leftrightarrow$
$1-2x = \sqrt{x+5}\cdot\sqrt{4x+1} \leftrightarrow (1-2)^2 = (x+5)(4x+1) \leftrightarrow 1-4x+4x^2 = 4x^2+x+20x+5 \leftrightarrow$
$4x^2-4x+1 = 4x^2+21x+5 \leftrightarrow -4 = 25x \leftrightarrow x = -\frac{4}{25}$

b) $\sqrt{25x+1} = \sqrt{9x-1}+\sqrt{4x+2} \leftrightarrow 25x+1 = \left(\sqrt{9x-1}+\sqrt{4x+2}\right)^2 \leftrightarrow$
$25x+1 = 9x-1+2\cdot\sqrt{9x-1}\cdot\sqrt{4x+2}+4x+2 \leftrightarrow 25x+1 = 13x+1+2\cdot\sqrt{9x-1}\cdot\sqrt{4x+2} \leftrightarrow$
$12x = 2\cdot\sqrt{9x-1}\cdot\sqrt{4x+2} \leftrightarrow 6x = \sqrt{9x-1}\cdot\sqrt{4x+2} \leftrightarrow 36x^2 = (9x-1)(4x+2) \leftrightarrow$
$36x^2 = 36x^2+18x-4x-2 \leftrightarrow 0 = 14x-2 \leftrightarrow 14x = 2 \leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

c) $\sqrt{45x-1} = \sqrt{5x-2}+\sqrt{20x+3} \leftrightarrow 45x-1 = \left(\sqrt{5x-2}+\sqrt{20x+3}\right)^2 \leftrightarrow$
$45x-1 = 5x-2+2\cdot\sqrt{5x-2}\cdot\sqrt{20x+3}+20x+3 \leftrightarrow 45x-1 = 25x+1+2\cdot\sqrt{5x-2}\cdot\sqrt{20x+3}$
$\leftrightarrow 20x-2 = 2\cdot\sqrt{5x-2}\cdot\sqrt{20x+3} \leftrightarrow 10x-1 = \sqrt{5x-2}\cdot\sqrt{20x+3} \leftrightarrow$
$(10x-1)^2 = (5x-2)(20x+3) \leftrightarrow 100x^2-20x+1 = 100x^2+15x-40x-6 \leftrightarrow$
$-20x+1 = -25x-6 \leftrightarrow 5x = -7 \leftrightarrow x = -\frac{7}{5}$

d) $\sqrt{4x+5} = \sqrt{x+7}-\sqrt{x} \leftrightarrow 4x+5 = \left(\sqrt{x+7}-\sqrt{x}\right)^2 \leftrightarrow 4x+5 = x+7-2\cdot\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x}+x \leftrightarrow$
$4x+5 = 2x+7-2\cdot\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x} \leftrightarrow 2x-2 = -2\cdot\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x} \leftrightarrow x = -1 = -\sqrt{x+7}\cdot\sqrt{x} \leftrightarrow$
$(x-1)^2 = (x+7)\cdot x \leftrightarrow x^2-2x+1 = x^2+7x \leftrightarrow 1 = 9x \leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

e) $3\sqrt{2x-6} = 2\sqrt{3x-6} \leftrightarrow \left(3\sqrt{2x-6}\right)^2 = \left(2\sqrt{3x-6}\right)^2 \leftrightarrow 9(2x-6) = 4(3x-6) \leftrightarrow$
$18x-54 = 12x-24 \leftrightarrow 6x = 30 \leftrightarrow x = 5$

f) $\sqrt{x+5}+1 = \sqrt{x+12} \leftrightarrow \left(\sqrt{x+5}+1\right)^2 = x+12 \leftrightarrow x+5+2\sqrt{x+5}+1 = x+12 \leftrightarrow$
$2\sqrt{x+5} = 6 \leftrightarrow \sqrt{x+5} = 3 \leftrightarrow x+5 = 9 \leftrightarrow x = 4$

g) $\sqrt{2x-4} = 2+\sqrt{2x+8} \leftrightarrow 2x-4 = \left(2+\sqrt{2x+8}\right)^2 \leftrightarrow 2x-4 = 4+4\sqrt{2x+8}+2x+8 \leftrightarrow$
$2x-4 = 2x+12+4\sqrt{2x+8} \leftrightarrow -16 = 4\sqrt{2x+8} \leftrightarrow \sqrt{2x+8} = -4 \leftrightarrow 2x+8 = 16 \leftrightarrow$
$2x-8 \leftrightarrow x = 4$

1. Bestimme jeweils die Definitionsmenge und löse die Gleichungen

a) $15 \cdot \sqrt{3x+9} = 10 \cdot \sqrt{8x+9} \rightarrow D = \left\{x|x \geq -\frac{9}{8}\right\}_{\mathbb{R}}$ L={9}

b) $\sqrt{x+5} = \sqrt{x+1} \rightarrow D = \{x|x \geq -1\}_{\mathbb{R}}$ L={4}

c) $4 \cdot \sqrt{x-1} = 3 \cdot \sqrt{x+6} \rightarrow D = \{x|x \geq -1\}_{\mathbb{R}}$ L={10}

d) $8 - \sqrt{x} = \sqrt{x-16} \rightarrow D = \{x|x \geq 16\}_{\mathbb{R}}$ L={25}

e) $\frac{6}{\sqrt{x+1}} = \frac{4}{\sqrt{x-4}} \rightarrow D = \{x|x \geq 4\}_{\mathbb{R}}$ L={8}

f) $\sqrt{x+3} = 5 - \sqrt{x-2} \rightarrow D = \{x|x \geq -2\}_{\mathbb{R}}$ L={6}

2. Löse die 2 Gleichungen

a) $\sqrt{4x+17} + 2\sqrt{x+1} = 13 \leftrightarrow 4x+17+4x+4+4\sqrt{4x+17}\sqrt{x+1} = 16 \leftrightarrow$

$8x+21+4\sqrt{(4x+17)(x+1)} = 169 \leftrightarrow \sqrt[4]{(4x+17)(x+1)} = 148-8x \leftrightarrow$

$4\sqrt{(4x+17)(x+1)} = 37-2x \leftrightarrow (4x+17)(x+1) = 1369-148x+4x \leftrightarrow$

$4x+21x+17 = 1369-148x+4x \leftrightarrow 169x = 1352 \leftrightarrow x = 8$

b) $\sqrt{2x-4} - \sqrt{2x+29} = \sqrt{2x-16} - \sqrt{2x+5} \leftrightarrow (2x-4) - 2\sqrt{2x-4}\sqrt{2x+29} + (2x+29) =$

$(2x-16) - \sqrt{2x-16}\sqrt{2x+5} + (2x+5) \leftrightarrow 4x+25-2\sqrt{(2x-4)}\sqrt{(2x+29)} + (2x+29) =$

$(2x-16) - 2\sqrt{(2x-16)} - \sqrt{(2x+5)} + 2x+5 \leftrightarrow 36 - 2\sqrt{(2x-4)(2x+29)} =$

$-2\sqrt{(2x-16)(2x+5)} \leftrightarrow 18 - \sqrt{(2x-4)(2x+29)} = -\sqrt{(2x-16)(2x+5)} \leftrightarrow$

$324 - 36\sqrt{(2x-4)(2x+29)} + (2x-4)(2x+29) = (2x-16)(2x+5) \leftrightarrow$

$-36\sqrt{(2x-4)(2x+29)} = -72x-288 \leftrightarrow \sqrt{(2x-4)(2x+29)} = 2x+8 \leftrightarrow$

$(2x-4)(2x+29) = 4x+32x+64 \leftrightarrow 4x+50x-116 = 4x+32x+64 \leftrightarrow$

$18x = 180 \leftrightarrow x = 10$

3. Gesucht sind die Lösungen der folgenden Gleichungen

Gib dabei den Definitionsbereich an und zeige die Lösung grafisch

a) $x + 2 - \sqrt{4-x} = x$ Definitionsbereich: 4-x≥ 0 ↔ $D\ (G) = (-\infty; 4)$

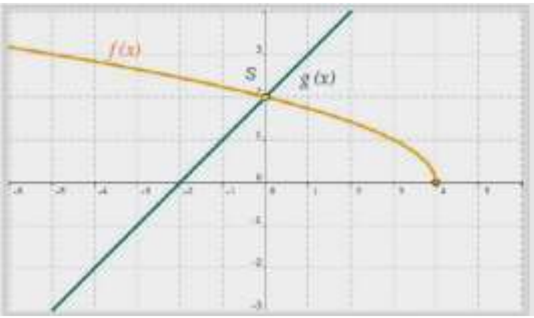
$x + 2\sqrt{4-x} \leftrightarrow$ Ğ: $(x+2)^2 = \left(\sqrt{4-x}\right)^2 \leftrightarrow x^2+4x+4 = 4-x \leftrightarrow x^2+5x = 0 \leftrightarrow$

$x(x+5) = 0 \leftrightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -5 \qquad$ L(Ğ) $= \{-5; 0\}$

Probe: $x = 0; \quad 0+2-\sqrt{4-0} = 0 \leftrightarrow 2-\sqrt{4} = 0$

$x = -5; \quad -5+2-\sqrt{4+5} = 0 \leftrightarrow -3-\sqrt{9} \neq 0 \qquad$ L (G) ≠ L (Ḡ)

Die Lösung der Gleichung: L (G) = {0}



G: $x + 2 - \sqrt{4-x} = 0$

f (x) $\sqrt{4-x}$

g (x) = x+2

S=S (0;2) der Schnittpunkt

b) $\sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2$ Definitionsbereich 2x+10≥↔ $x \geq -5$ 4x-8≥ $0 \leftrightarrow x \geq 0$

D (G) = [-5, ∞) ∪ 8∞) $= [2, \infty)$

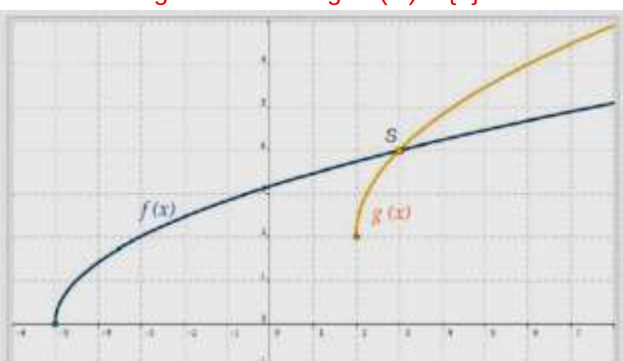
G: $\sqrt{2x+10} = 2 + \sqrt{4x-8}$ Ğ: $\left(\sqrt{2x+10}\right)^2 = \left(2+\sqrt{4x-8}\right)^2 \leftrightarrow -x+7 = 2\sqrt{4x-8}$

$(-x+7)^2 = \left(2+\sqrt{4x-8}\right)^2 \leftrightarrow x^2 - 30x + 81 = 0 \leftrightarrow x_{1,2} = 15 \pm \sqrt{225-81} = 15 \pm 12$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = 27$

Probe: L (G) ≠ L (Ḡ) $\qquad x_2 = 27 \notin L\ (G)$

Die Lösung der Gleichung: L (G) = {3}



G: $\sqrt{2x+10} - \sqrt{4x-8} = 2$

f: (x)= $\sqrt{2x+10}$

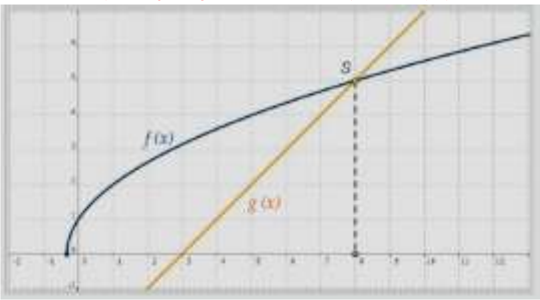
g: (x)= $2 + \sqrt{4x-8}$

S: =S (3,4)

c) $\sqrt{3x+1} - x + 3 = 0$ Definitionsbereich 3x+1≥ 0 D (G) = [$-\frac{1}{3}$, ∞)

Ğ: $\left(\sqrt{3x+1}\right)^2 = (x-3)^2 \leftrightarrow x^2 - 9x + 8 = 0$ $x_1 = 1,$ $x_2 = 8$

L = (Ğ) = $\{1, 8\}$ L = (Ğ) $\neq L\,(G)$ L (G) = {8}



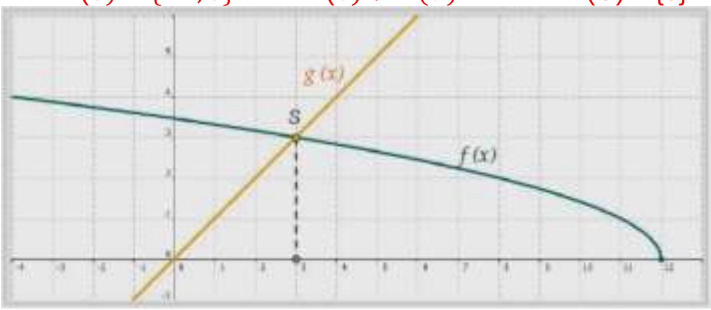
f (x) = $\sqrt{3x+1}$

g (x) = x-3

d) $x = \sqrt{-x+12}$ Definitionsbereich -x+12≥ 0 $x \leq 12$ D (G) = (-∞; 12)

Ğ: $x^2 = (-x+12)^2$ $x_1 = -4,$ $x_2 = 3$

L = (Ğ) = $\{-4; 3\}$ L = (Ğ) $\neq L\,(G)$ L (G) = {3}



f (x) = $\sqrt{-x+12}$

g = x

4. Berechne die Lösungsmenge

a) $x^2 + \sqrt{5}x + \frac{8}{3} = \frac{8}{3}x^2 + \sqrt{5}x = 0 \leftrightarrow x \cdot (x+3) = 0 \leftrightarrow x = -\sqrt{5}$ ∨ $x = 0$ $L = \{0; -\sqrt{5}\}$

b) $43x^2 + \sqrt{3}x + 8 = 0 = x^2 + \frac{\sqrt{3}}{43}x + \frac{8}{43} = 0 \leftrightarrow x_{1/2} - \frac{\sqrt{3}}{96} \pm \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{96}\right)^2 - \frac{8}{43}}$

Es gilt $\left(-\frac{\sqrt{3}}{96}\right)^2 - \frac{8}{43} < 0. \mathit{Also}\ L = \{\,\}$

c) $10x \cdot (x+4) = 2 \cdot (3x+7) \cdot (x+2) - 4 \cdot (3x+7)$ $L = \left\{0; -\frac{13}{2}\right\}$

5. Löse die Gleichungen

a) $2x + \sqrt{25-x^2} = 0 \leftrightarrow \sqrt{25-x^2} = 2x \leftrightarrow 25x^2 = 4x^2 \leftrightarrow 25 = 5x" \leftrightarrow$ $x_1 = \sqrt{5}$ $x_2 = -\sqrt{5}$

Für beide Lösungen gilt: $\sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-5} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$x_1 = \sqrt{5}$ $2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} \neq 0$ $x_2 = -\sqrt{5}$ $-2\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 0$

Nur die zweite Lösung ist brauchbar: x = $-\sqrt{5}$

b) $2 - \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} = 0 \leftrightarrow 2\sqrt{25-x^2} = x \leftrightarrow \left(2\sqrt{25-x^2}\right)^2 = x^2 \leftrightarrow 4(25-x^2) = x^2 \leftrightarrow 100 - 4x^2 = x^2$

100=5x²↔ $20 = x^2$ $x_1 = \pm\sqrt{20}$ $x_2 = \pm 2\sqrt{5}$

$x_1 = 2\sqrt{5} \leftrightarrow 2 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{25-20}} = 2 - \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 - 2 = 0$

$x_2 = 22\sqrt{5} \leftrightarrow 2 - \frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{25-20}} = 2 + \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 2 + 2 \neq 0$ Einzige Lösung ist x = $2\sqrt{5}$

c) $\sqrt{4x^2 + x - 2} + 1 = 2x \leftrightarrow \left(\sqrt{4x^2 + x - 2}\right)^2 = (2x-1)^2 \leftrightarrow 4x^2 + y - 2 = 4x^2 - 4x + 1 \leftrightarrow$

5x=3↔ $x = \frac{3}{5}$ Probe: $\sqrt{4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{3}{5} - 2} = 2 \cdot \frac{3}{5} - 1 \leftrightarrow \sqrt{4 \cdot \frac{9}{25} + \frac{3}{5} - 2} = \frac{6}{5} - 1 \leftrightarrow \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{3}{5} - 2} = \frac{1}{5} \leftrightarrow$

$\sqrt{\frac{36+15-50}{25}} = \frac{1}{5} \leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5} \leftrightarrow \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

d) $\sqrt{3x+4}+\sqrt{4x-7}=7 \leftrightarrow \sqrt{3x+4}=7-\sqrt{4x-7} \leftrightarrow \left(\sqrt{3x+4}\right)^2=\left(7-\sqrt{4x-7}\right)^2 \leftrightarrow$

$3x+4=49-14\sqrt{4x-7}+(4x-7) \leftrightarrow 14\sqrt{4x-7}=x+38 \leftrightarrow \left(14\sqrt{4x-7}\right)^2=(x+38)^2 \leftrightarrow$

$196(4x-7)=x^2+76x+1444 \leftrightarrow 784x-1372=x^2+76x+1444 \leftrightarrow$

$0=x^2-708x+2816$

$x_1=704 \qquad \sqrt{3\cdot 704+4}+\sqrt{4\cdot 704-7}=\sqrt{2116}+\sqrt{2809}=46+53\neq 7$

$x_2=4 \qquad \sqrt{3\cdot 4+4}+\sqrt{4\cdot 4-7}=\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$

Die Wurzelgleichung hat die Lösung x = 4

dass $x_1=704$ *viel zu gross ist könnte man auch ohne Einsetzen sehen*

6. Löse folgende Gleichungen

a) $\sqrt[3]{x}=5 \leftrightarrow x=125$

b) $\sqrt[4]{x-2}=\frac{3}{2} \leftrightarrow x=7\frac{1}{16}$

c) $2-\sqrt[3]{x^2+5}=6-7 \leftrightarrow x_{1,2}\pm\sqrt[4]{22}\approx\pm 2{,}166$

d) $\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{2x} \leftrightarrow x_1=0;\ x_2=2$

e) $\sqrt{3x}-\sqrt[3]{2x^2}=0 \leftrightarrow x_1=0;\ \ x_2=6\frac{3}{4}$

f) $x\cdot\sqrt[3]{x}-2{,}5\cdot\sqrt[3]{x^2}=1{,}5 \leftrightarrow x=3\sqrt{3\approx 5{,}196}$

g) $\sqrt[5]{x}-1=\frac{1}{4\cdot\sqrt[5]{x}} \leftrightarrow x=\frac{(1+\sqrt{2})^5}{32}\approx 2{,}563$

h) $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}=1 \leftrightarrow x=\left(\sqrt{2}-1\right)^3\approx 2{,}563$

i) $\sqrt[3]{5x}+\frac{3}{\sqrt[3]{5x}}=2\sqrt{3} \leftrightarrow x=\frac{3}{5}\sqrt{3}\approx 1{,}039$

j) $\sqrt[3]{x^2}=0{,}25 \leftrightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1}{8}$

k) $\sqrt[5]{x^2-8}=2x_{1,2}=\pm 2\sqrt{10}\approx\pm 6{,}325$

l) $\sqrt[3]{1+x}=\sqrt[6]{x^2}=\leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

m) $\sqrt[4]{2x}-\sqrt{3x}=0 \leftrightarrow x_1=0;\ \ x_2=\frac{2}{9}$

n) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}=6 \leftrightarrow x=8$

o) $\sqrt[5]{x^2}-4\cdot\sqrt[5]{x}+4=0 \leftrightarrow x=32$

p) $\sqrt[3]{x^2}+2=2\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{x} \leftrightarrow x=2\sqrt{2}\approx 2{,}828$

q) $\sqrt{x}-5\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{x}+8=0 \leftrightarrow x_1=1024;\ x_2=4$

r) $\sqrt[3]{2x}=2\cdot\left(\sqrt[6]{2x}+1\right) \leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)^6\approx 207{,}923$

7. Gib die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen an.

a) $\sqrt{x}=3\ D=[0;\infty[\mathit{und}\ L=\{9\}$

b) $\sqrt{x+1}=4\ \ D=[-1;\infty[\mathit{und}\ L=\{15\}$

c) $\sqrt{4x-12}+3=7\ \ D=[-3;\infty[\mathit{und}\ L=\{7\}$

d) $3\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+1}\ \ D=[1;\infty[\mathit{und}\ L=\{2\}$

e) $\sqrt{5x}=\sqrt{4x+9}\ \ D=[0;\infty[\mathit{und}\ L=\{9\}$

f) $\sqrt{9x+1}=2\sqrt{2x}+1\ \ D=[-0{,}5;\infty[\mathit{und}\ L=\{3\}$