Klassenarbeit – Quadratische Funktionen

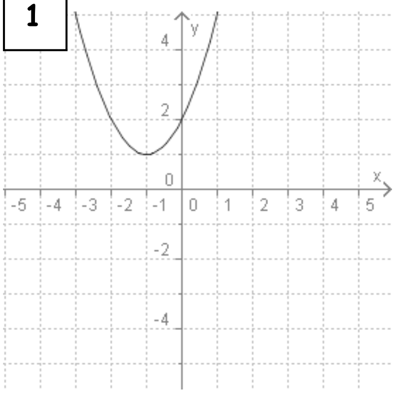
Schreibe die Rechnungen sorgfältig mit Ansatz, Lösungsweg und Kommentaren auf. Skizzen sind sorgfältig und mit Lineal zu erstellen, Ergebnisse zu unterstreichen. Runde die Ergebnisse sinnvoll! Die Arbeitszeit beträgt 45 Minuten.

Aufgabe 1

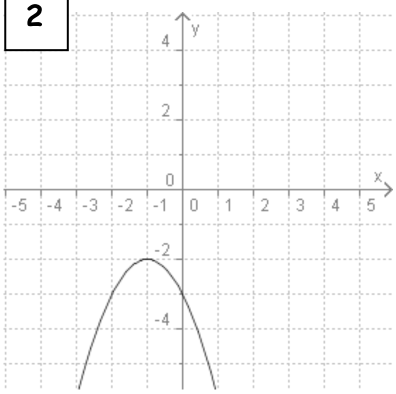
Welche Gleichung gehört zu welchem Graphen? Achtung! Zu einer Gleichung fehlt der Graph und zu einem Graphen fehlt die Gleichung. Ergänze auch den fehlenden Graphen und gib die fehlende Gleichung an! (1 Kästchen ≙ 1 Einheit)

a) $y = (x - 2)^2$		**b)** $y = -(x - 3)^2 - 2$		**c)** $y = (x + 1)^2 + 1$	
d) $y = -(x + 1)^2 - 2$		**e)** $y = (x - 2)^2 + 1$		**f)** y =	

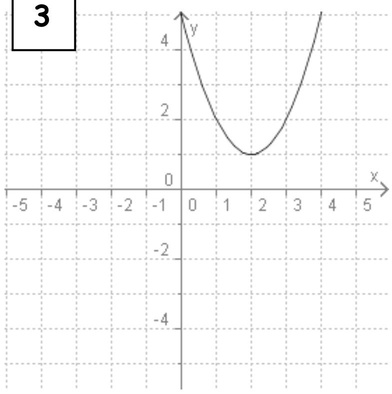
1



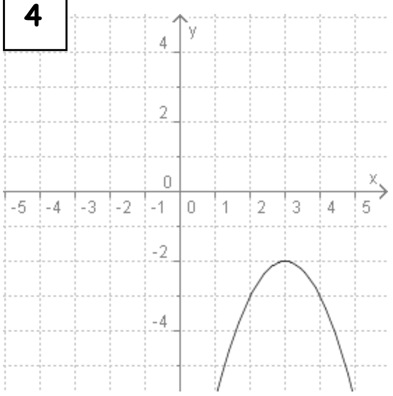
2



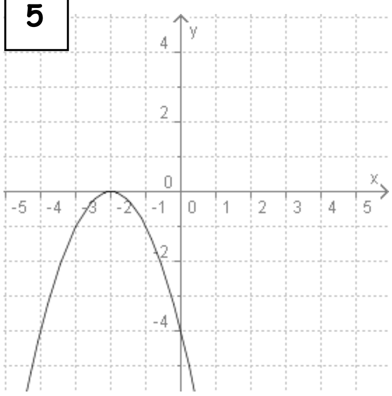
3



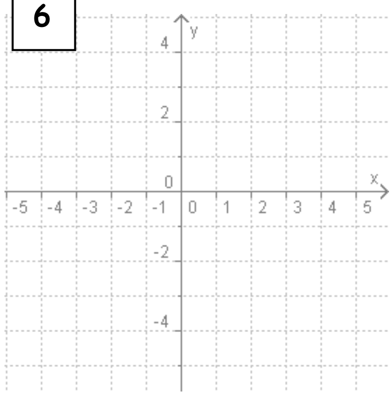
4



5



6



Aufgabe 2

Die Funktionsgleichung $f(x) = 4x^2 + 8x + 2$ beschreibt eine Parabel.

a) Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel!
b) Weise nach, dass der Punkt P (6,2/205,36) auf der Parabel liegt!
c) Gib die Gleichung der Parabel an, die gegen über f um eine Einheit nach unten und um zwei Einheiten nach links verschoben ist!

Aufgabe 3

Ein Ball wird annähernd senkrecht nach oben geworfen. Seine Höhe kann mit der Funktion h mit $h(x) = -5x^2 + 17x + 1{,}9$, wobei $h(t)$ die Höhe des Balles in Metern und t die Zeit in Sekunden nach dem Abwurf beschreiben.

a) Woher weiß man, dass die Person, die den Ball wirft, ca. 1,90 m groß ist?
b) Ermittle, wie lange der Ball in der Luft ist! (Runde auf Zehntel!)
c) Nach wie vielen Sekunden etwa ist der Ball am höchsten Punkt?
d) Nach wie vielen Sekunden etwa hat der Ball eine Höhe von 4 m erreicht?

Aufgabe 4

Du willst für eine Party an einem See ein rechteckiges Grundstück abzäunen. Eine Seite wird durch das gerade verlaufende Ufer gebildet. Für die anderen Seiten hast du 40 m Absperrband zur Verfügung.

Wie musst du die Seitenlängen wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?

Aufgabe 5

Das Produkt aus dem Quadrat einer Zahl und der um 3 verminderten Zahl ist Null.

Wie lautet die Zahl?

Zusatzaufgabe

Zeige mit Hilfe der p-q-Formel: Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt: $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$.

LÖSUNGEN

Aufgabe 1

a) y = $(x – 2)^2$	**6**	**b)** y = $-(x – 3)^2$ - 2	**2**	**c)** y = $(x + 1)^2$ + 1	**4**
d) y = $-(x + 1)^2$ - 2	**3**	**e)** y = $(x – 2)^2$ + 1	**1**	**f)** y = $-(x + 2)^2$	**5**

Vorgehensweise:

Die Funktionsgleichungen sind in der Scheitelpunktform $\mathrm{y} = (\mathrm{x} + \mathrm{d})^2 + \mathrm{e}$ dargestellt. Daher lässt sich leicht der Scheitelpunkt mit S (-d | e) ablesen.

Steht vor der Klammer ein Minus, so handelt es sich um eine nach unten geöffnete Parabel.

Aufgabe 2

a) Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel!

$f(x) = 4x^2 + 8x + 2$ | 4 ausklammern

$f(x) = 4\left(x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)$ | quadratische Ergänzung $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ addieren und subtrahieren

$f(x) = 4\left(x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right)$ | binomische Formel anwenden

$f(x) = 4((x+1)^2 - 1 + 0{,}5))$ | zusammenfassen u. ausmultiplizieren

$f(x) = 4(x+1)^2 - 4 + 2$

$f(x) = 4(x+1)^2 - 2$

Scheitelpunkt ablesen (siehe Erklärung Aufg.1) **S (-1 / -2)**

b) Weise nach, dass der Punkt P (6,2/205,36) auf der Parabel liegt!

Ein Punkt liegt auf einem Graphen, wenn er die Funktionsgleichung erfüllt. Demzufolge sind die durch den Punkt gegeben Werte für x und y in die Gleichung einzusetzen. Ergeben sich links und rechts des Gleichheitszeichens die gleichen Werte, liegt der Punkt auf der Parabel.
Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = 4x^2 + 8x - 2$

x = 6,2 und y = 205,36

205,36 = 4 · $6{,}2^2$ + 8 · 6,2 + 2
205,6 = 4 · 38,44 + 49,6 + 2
205,6 = 153,76 + 49,6 + 2

205,36 = 205,36 wahre Aussage ⇨ Der Punkt P liegt auf der Parabel.

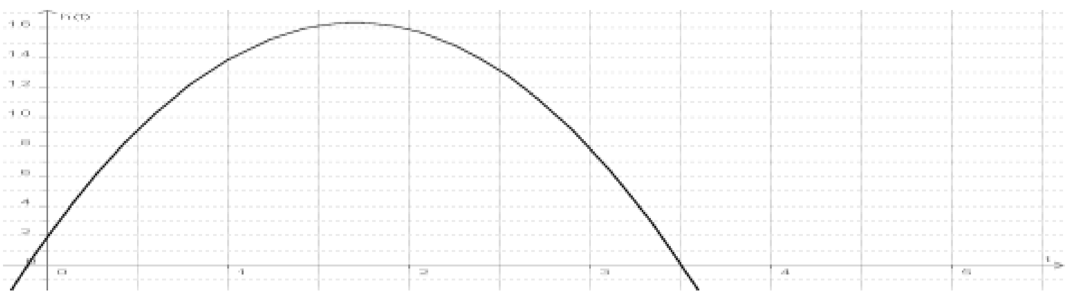
c) Gib die Gleichung der Parabel an, die gegenüber f um eine Einheit nach unten und um zwei Einheiten nach links verschoben ist!

Ausgehend von der unter a) bestimmten Scheitelpunktform ergibt sich ein neuer Scheitelpunkt bei (-3 / -4).

Somit ergibt sich: $f_{neu}(x) = 4(x+3)^2 - 4 = 4(x^2 + 6x + 9) - 4 = 4x^2 + 24x + 36 - 4 = 4x^2 + 24x + 32$

Aufgabe 3

Parabel:



Beim Zeichnen der Skizze sollte der Graph am Schnittpunkt mit der y-Achse beginnen und beim Schnittpunkt mit der x-Achse enden, da der Ball ja nicht in die Erde eindringt.

a) Woher weiß man, dass die Person, die den Ball wirft, ca. 1,90 m groß ist?

Der Schnittpunkt mit der y-Achse (1,9) ist der Abwurfpunkt. Man kann also davon ausgehen, dass der Ball von einer Höhe von 1,90 m abgeworfen wird. Da man beim Werfen den Arm meist über dem Kopf hat, ist die werfende Person vermutlich etwas kleiner als 1,90 m.

b) Ermittle, wie lange der Ball in der Luft ist! (Runde auf Zehntel!)

Man benötigt den Zeitpunkt, an dem der Ball auf der Erde auftrifft. Das ist mathematisch der Schnittpunkt mit der x-Achse, also die Nullstelle. (x / 0) mit x = t.

Lösungen mit Hilfe der p-q-Formel, wobei diese zwei Werte ergeben wird, von denen nur einer der richtige Wert ist.

h(x) = 0

$0 = -5x^2 + 17x + 1{,}9$ | -5 ausklammern

$0 = -5\left(x^2 - \frac{17}{5}x - \frac{1{,}9}{5}\right)$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit p = $-\frac{17}{5}$ = -3,4 und q =$-\frac{1{,}9}{5}$ = -0,38

Nach Einsetzen in die Formel ergibt sich $x_1 = 3{,}5$ und $x_2 = -0{,}1$ (unsinnige Angabe)

Der Ball ist also 3,5 Sekunden in der Luft.

c) Nach wie vielen Sekunden etwa ist der Ball am höchsten Punkt?

Man benötigt den Scheitelpunkt der Parabel, da dies bei der nach unten geöffneten Parabel der höchste Punkt ist. Der x-Wert des Scheitelpunktes beantwortet die Frage nach dem Zeitpunkt, die y-Koordinate gibt die Höhe an.

d) Nach wie vielen Sekunden etwa hat der Ball eine Höhe von 4 m erreicht?

Die Höhe ist der bekannte y-Wert, somit muss der dazugehörige x-Wert berechnet werden.

$4 = -5x^2 + 17x + 1{,}9$ | -4

$0 = -5x^2 + 17x + 1{,}9 - 4$ | -5 ausklammern

$0 = -5\left(x^2 - \frac{17}{5}x + \frac{2{,}1}{5}\right)$

$0 = (x^2 - 3{,}4x + 0{,}42)$

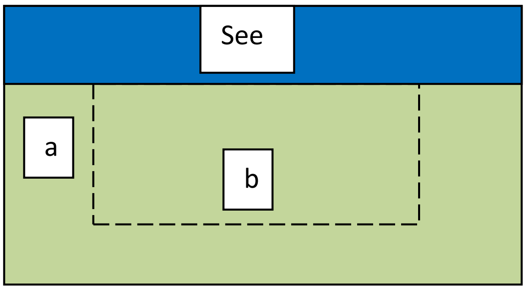
$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ mit p = -3,4 und q = -0,42

Nach Einsetzen in die Formel ergibt sich $x_1 = 3{,}3$ und $x_2 = 0{,}12$.

Der Ball befindet sich einmal nach 0,1 s und einmal nach 3,3 s in 4 m Höhe.

Aufgabe 4

Wie musst du die Seitenlängen wählen, damit der Flächeninhalt maximal wird?



Geg.: $u = 40$ m

$u = 2a + b$ | nach b umstellen

$b = u - 2a = 40 - 2a$ | b in Flächeninhaltsformel einsetzen

$A = ab$

$A(a) = a(40 - 2a)$

$A(a) = -2a^2 + 40a$

Quadratische Funktion ⇨ Scheitelpunkt berechnen, da dort der Flächeninhalt maximal wird. Der x-Wert des Scheitelpunktes ergibt die Länge der Seite a und der y-Wert ergibt den maximalen Flächeninhalt. Dazu wird die Gleichung in die Scheitelpunktform gebracht.

$A(a) = -2a^2 + 40a$ | -2 ausklammern

$A(a) = -2(a^2 - 20a)$ | quadratische Ergänzung addieren u. subtrahieren

$A(a) = -2(a^2 - 20a + \left(\frac{20}{2}\right)^2 - \left(\frac{20}{2}\right)^2)$ | binom. Formel anwenden, zusammenfassen

$A(a) = -2((a - 10)^2 - 100))$ | ausmultiplizieren

$A(a) = -2(a - 10)^2 + 200))$

S (10 / 200)

Seite a = 10 m

$b = 40 - 2 \cdot 10 = 20$ m

Wenn die Seite parallel zum Ufer 20 m lang und die andere Seite 10 m lang ist, wird der Flächeninhalt maximal.

Aufgabe 5

Das Produkt aus dem Quadrat einer Zahl und der um 3 verminderten Zahl ist Null. Wie lautet die Zahl?

$x^2 (x - 3) = 0$ Ein Produkt wird Null, wenn ein Faktor Null ist.
$x_1 = 0$
$0 = x - 3$ | +3
$x_2 = 3$
Die Zahl kann 0 oder 3 sein.

Zusatzaufgabe

Zeige mit Hilfe der p-q-Formel: Sind x_1 und x_2 die Lösungen einer quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$, so gilt: $p = -(x_1 + x_2)$ und $q = x_1 \cdot x_2$.

$x^2 + px + q = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | $+\left(\frac{p}{2}\right)$

$x_1 + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | quadrieren

$\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | binom. Formel anwenden

$(x_1)^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x_1 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ | $-\left(\frac{p}{2}\right)^2$

$(x_1)^2 + p \cdot x_1 = -q$

Analog dazu ergibt sich für x_2 folgende Gleichung (Dass die Wurzel bei x_2 subtrahiert wird, spielt keine Rolle, da wir quadrieren.)

$x_2 + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ | quadrieren

$\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2$ … (weiter wie oben)

$(x_2)^2 + p \cdot x_2 = -q$

Rote Gleichungen gleichsetzen:

$(x_1)^2 + p \cdot x_1 = (x_2)^2 + p \cdot x_2$ | $-(x_2)^2$; $-px_1$

$(x_1)^2 - (x_2)^2 = p \cdot x_2 - p \cdot x_1$ | (-p) ausklammern, 3. binom. Formel anwenden

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -p(-x_2 + x_1)$

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = -p(x_1 - x_2)$ | $:(x_1 - x_2)$

$(x_1 + x_2) = -p$

$\boxed{p = -(x_1 - x_2)}$ w.z.b.w. (qu.e.d)

$(x_1)^2 + p \cdot x_1 = -q$ | nach p umstellen

$p = \frac{-q - (x_1)^2}{x_1}$

$(x_2)^2 + p \cdot x_2 = -q$ | nach p umstellen

$p = \frac{-q-(x_2)^2}{x_2}$

Beide nach p umgestellte Gleichungen gleichsetzen

$\frac{-q-(x_1)^2}{x_1} = \frac{-q-(x_2)^2}{x_2}$ | auf den gleichen Nenner bringen

$\frac{x_2(-q-(x_1)^2)}{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1(-q-(x_2)^2)}{x_2 \cdot x_1}$

$x_2(-q-(x_1)^2) = x_1(-q-(x_2)^2)$ | ausmultiplizieren

$x_2 \cdot (-q) - x_2(x_1)^2 = x_1(-q) - x_1(x_2)^2$

$-px_2 - x_2(x_1)^2 = -px_1 - x_1(x_2)^2$ | $+px_1$; $+x_2(x_1)^2$

$-px_2 + px_1 = -x_1(x_2)^2 + x_2(x_1)^2$ | p ausklammern; x_1x_2 ausklammern

$p(-x_2 + x_1) = x_1x_2(-x_2 + x_1)$ | $:(-x_2 + x_1)$

$\boxed{p = x_1x_2}$

w.z.b.w.