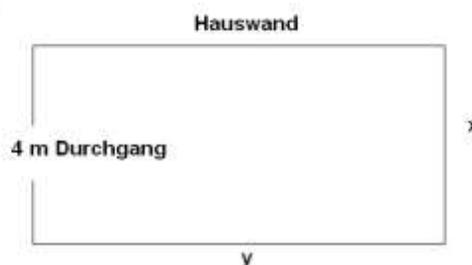


Schulaufgabe aus der Mathematik

AUFGABEN

1. Der Flächeninhalt eines Quadrats beträgt 256 cm^2 . Berechne die Längen der Quadratseite und der Diagonalen.
2. Die Punkte A (2|1), B (6|4) und C (4|5) bilden die Ecken eines Dreiecks.
 - a. Berechne die exakten Werte der drei Seitenlängen des Dreiecks ABC.
 - b. Begründe, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
 - c. Berechne die Höhe $h = \overline{CF}$
3. Der Feuermann Karl löscht einen Hausbrand mit Wasser. Der Wasserstrahl seines Löschschlauchs kann mit der Parabelgleichung $Y = -0,025 x^2 + x$ beschrieben werden.
 - a. Berechne die Reichweite die Karl erreichen kann.
 - b. Berechne die Höhe die Karl maximal erreichen kann.
 - c. Das brennende Haus steht 25 m entfernt. Berechne in welcher Höhe der Wasserstrahl das Haus trifft.
4. Eine Gärtnerei möchte an einer Hauswand einen rechteckigen Blumengarten anlegen. Das Grundstück soll mit einem 60 m langen Zaun abgesteckt werden, wobei ein 4 m breiter Zugang frei bleiben soll. Berechne die Längen x und y so, dass der Flächeninhalt des Grundstücks möglichst groß ist.



Viel Erfolg!

Lösungen

1. Der Flächeninhalt eines Quadrats beträgt 256 cm^2 . Berechne die Längen der Quadratseite und der Diagonalen.

Seite des Quadrats: a

$$A_{\text{Quadrat}} = a^2 = 256 \text{ cm}^2 \quad \Rightarrow a = \sqrt{256 \text{ cm}^2} \quad \Rightarrow a = 16 \text{ cm}$$

Die Länge einer Seite beträgt 16 cm .

$$\text{Probe: } 16 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm} = 256 \text{ cm}^2$$

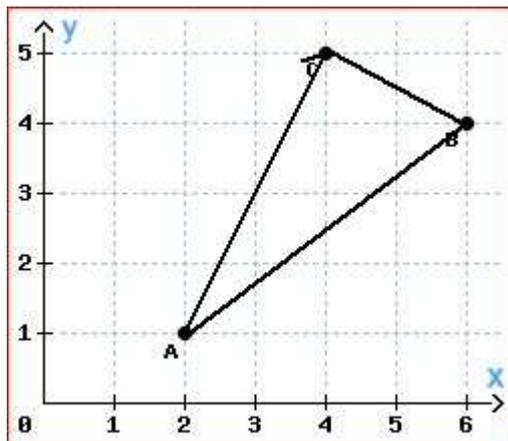
Diagonale des Quadrats: d

Nach Pythagoras: $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$

$$d^2 = 256 \text{ cm}^2 + 256 \text{ cm}^2$$

$$d = \sqrt{512 \text{ cm}^2} = 22,63 \text{ cm}$$

Die Länge der Diagonale des Quadrats beträgt $22,63 \text{ cm}$.



2. Die Punkte A (2|1), B (6|4) und C (4|5) bilden die Ecken eines Dreiecks.

- a. Berechne die exakten Werte der drei Seitenlängen des Dreiecks ABC.

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$a = \overline{BC} = \sqrt{(6-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ cm}$$

$$b = \overline{AC} = \sqrt{(2-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 4,47 \text{ cm}$$

$$c = \overline{AB} = \sqrt{(2-6)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Die Seitenlängen sind also: $a = 2,24 \text{ cm}$, $b = 4,47 \text{ cm}$, $c = 5 \text{ cm}$.

- b. Begründe, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

Für rechtwinklige Dreiecke gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5 + 20 = 25$$

damit ist bewiesen, dass es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

- c. Berechne die Höhe $h = \overline{CF}$.

Da bei C der rechte Winkel liegt, ist die Höhe h gleich der Seitenlänge von $a = \overline{BC}$. Damit ist $h = 2,24 \text{ cm}$.

3. Der Feuermann Karl löscht einen Hausbrand mit Wasser. Der Wasserstrahl seines Löschschlauchs kann mit der Parabelgleichung $y = -0,025 x^2 + x$ beschrieben werden.

- a. Berechne die Reichweite die Karl erreichen kann.

Dazu muss man die Nullstellen der Funktion, also die Schnittpunkte mit der x-Achse ausrechnen. Dies geschieht mit der Mitternachtsformel, die für den Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ gilt:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot (-0,025)}$$
$$x_1 = \frac{-1 + 1}{2 \cdot (-0,025)} \quad x_1 = 0$$
$$x_2 = \frac{-1 - 1}{2 \cdot (-0,025)}$$
$$x_2 = \frac{-2}{-0,05} \quad x_2 = 40$$

Karls Reichweite beträgt 40 m.

- b. Berechne die Höhe die Karl maximal erreichen kann.

Zur Berechnung der Höhe braucht man den Scheitelpunkt der Funktion. Zur Erinnerung: die Scheitelpunktform der Parabelgleichung lautet:
 $y = f(x) = a(x - b)^2 + c \Rightarrow$ die Koordinaten des Scheitelpunkts sind: S(b|c)

$$y = -0,025 x^2 + x$$
$$y = -\frac{1}{40} x^2 + x$$
$$y = -\frac{1}{40} (x^2 - 40 x)$$
$$y = -\frac{1}{40} ((x - 20)^2 - 400)$$
$$y = -\frac{1}{40} (x - 20)^2 + 10$$

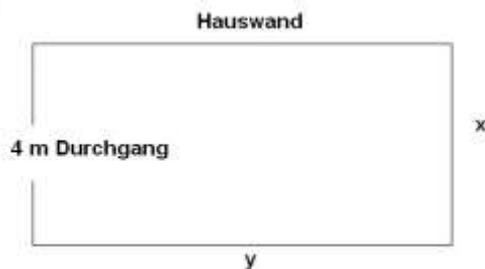
Damit hat der Scheitel folgende Koordinaten: S(20|10).
Die maximale Höhe ist also 10 m.

- c. Das brennende Haus steht 25 m entfernt. Berechne in welcher Höhe der Wasserstrahl das Haus trifft.

$$f(25) = -0,025 \cdot 25^2 + 25$$
$$f(25) = -0,025 \cdot 625 + 25$$
$$f(25) = -15,625 + 25$$
$$f(25) = 9,375$$

Der Wasserstrahl trifft das Haus in 9,375 m Höhe.

4. Eine Gärtnerei möchte an einer Hauswand einen rechteckigen Blumengarten anlegen. Das Grundstück soll mit einem 60 m langen Zaun abgesteckt werden, wobei ein 4 m breiter Zugang frei bleiben soll. Berechne die Längen x und y so, dass der Flächeninhalt des Grundstücks möglichst groß ist.



$$\begin{aligned}U &= x + (x - 4) + y \\60 &= x + (x - 4) + y \\y &= 60 - x - x + 4 \\y &= -2x + 64\end{aligned}$$

Flächeninhalt $A = x \cdot y$ soll maximal werden:

$$\begin{aligned}A &= x \cdot (-2x + 64) \\f(x) &= -2x^2 + 64x\end{aligned}$$

Scheitelbestimmung:

$$\begin{aligned}f(x) &= -2(x^2 - 32x) \\f(x) &= -2(x^2 - 2 \cdot 16x) \\f(x) &= -2(x - 16)^2 - 256 \\f(x) &= -2(x - 16)^2 + 512 \\x &= 16 \text{ m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U &= x + (x - 4) + y \\60 \text{ m} &= 16 \text{ m} + 12 \text{ m} + y \\y &= 32 \text{ m}\end{aligned}$$

Der Zaun ist 16 m lang und 32 m breit.