Ein **Prisma** wird begrenzt von der Grundfläche, der Deckfläche und dem Mantel.
Grundfläche und Deckfläche sind deckungsgleiche (kongruente) Dreiecke, Vierecke oder Vielecke.
Die Mantelfläche besteht aus Rechtecken.

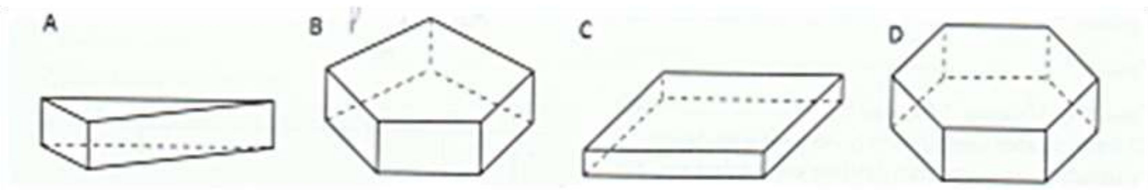
<u>Oberfläche</u>
Die **Oberfläche** O ist die Summe aus dem Doppelten der Grundfläche G und der Mantelfläche M **$O = 2 \cdot G + M$**

Die **Mantelfläche** M ist das Produkt aus dem Umfang u der Grundfläche mit der Körperhöhe h **$M = u \cdot h$**

<u>Volumen</u>
Das **Volumen** eines Prismas lässt sich als Produkt aus Grundfläche und Körperhöhe berechnen **$V = G \cdot h$**

<u>Bemerkung</u>**:**
Prismen werden nach der Eckenzahl ihrer Grundfläche benannt, z.B. Dreiecksprisma, Vierecksprisma usw. Vierecksprismen können genauer nach der Art des Vierecks benannt werden: Rautenprisma, Trapezprisma usw.
Quader und Würfel sind besondere Prismen.

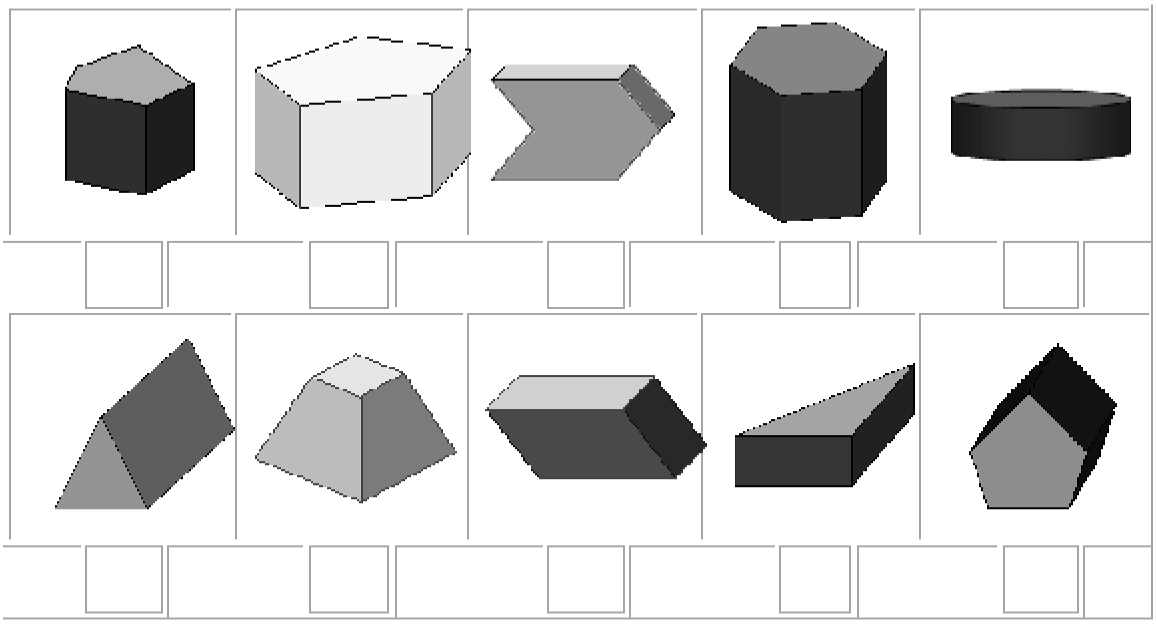
1. Bestimme die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen. Schreibe zu jedem Bild, welche Grundfläche das Prisma hat.




| Körper | Grundfläche | Name des Prismas | Anzahl der Ecken | Anzahl der Kanten | Anzahl der Flächen |
|---|---|---|---|---|---|
| A | | | | | |
| B | | | | | |
| C | | | | | |
| D | | | | | |

2. Hat die Grundfläche eines Prismas **n** Ecken, so besitzt das Prisma ______ Ecken. Die Anzahl der Kanten ist __________. Die Anzahl der Flächen beträgt ______, da zu den Mantelflächen noch eine Deckfläche und eine Grundfläche gezählt werden müssen.

1. Welche der folgenden Körper sind Prismen? Kreuze an.

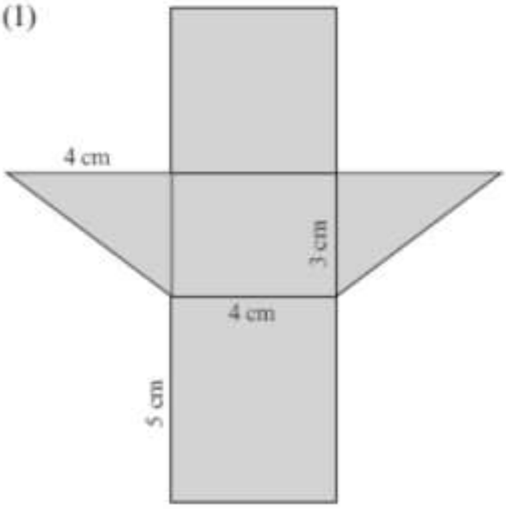


2. Die Bilder (1) und (2) stellen die Netze zweier Prismen im Maßstab 1:2 dar.

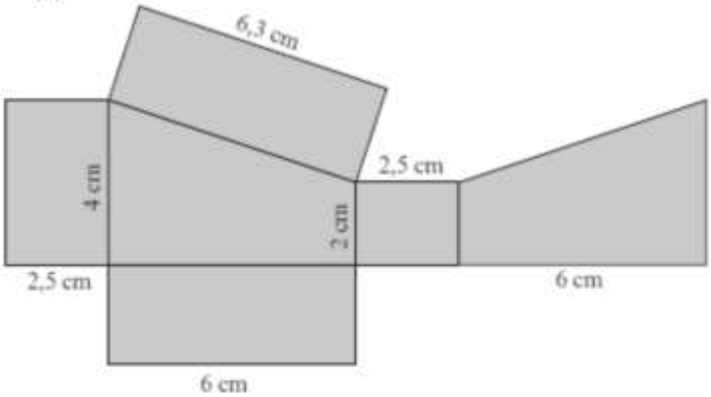
**a)** Berechne die Oberflächeninhalte beider Prismen. Entnimm die benötigten Maße den Bildern und schreibe die Maße an die Figuren. Runde auf $cm^2$.

**b)** Berechne die Volumina der Prismen. Runde hier entsprechend sinnvoll.

(1)




(2)




3. Ergänze die Lückenwörter

Ein Prisma ist ein ______________________ ___________________________.

Es hat eine ________________________ und eine ______________________.

Dabei handelt es sich um ______________________ (z.B. _________________)

Diese sind ___________________________ und zueinander ______________________.

Die ______________________ sind in jedem Fall ______________________, diese stehen

______________________ zu ______________________ und ______________________.

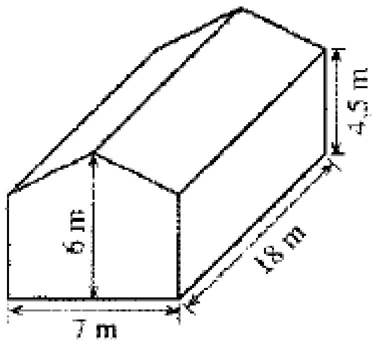
1. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem rechtwinkeligen Dreieck als Grund-
fläche und der Körperhöhe h!
$a = 9$ cm  $b = 12$ cm  $c = 15$ cm  $h = 4$ cm

Lösung: ____________________

2. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem Trapez als Grundfläche und der Körperhöhe h!
$a = 17$ cm; $b = 15$ cm; $c = 3$ cm; $d = 13$ cm; $h_a = 12$ cm; $h = 8$ cm

Lösung: ____________________

3. Berechne das Volumen des abgebildeten Prismas



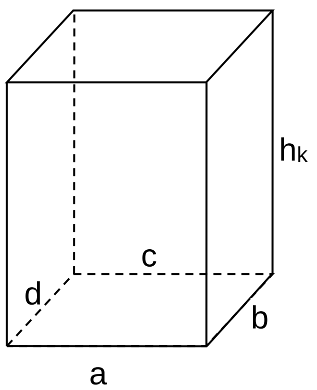

Lösung: ____________________

4. Erläutere die Bedeutung dieser Formeln

$O = 2 \cdot G + h_k \cdot u$

$O = h_a \cdot a + h_k \cdot (a + b + c)$

5. Berechne die Oberfläche der Prismen



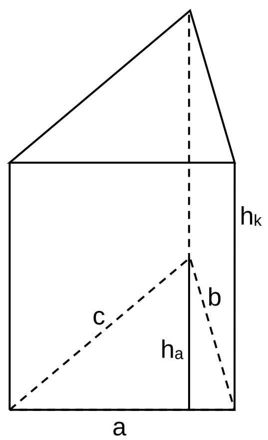

$a = 3$ cm

$b = 2$ cm

$c = 3$ cm

$d = 2$ cm

$h_k = 5$ cm




$a = 5$ cm

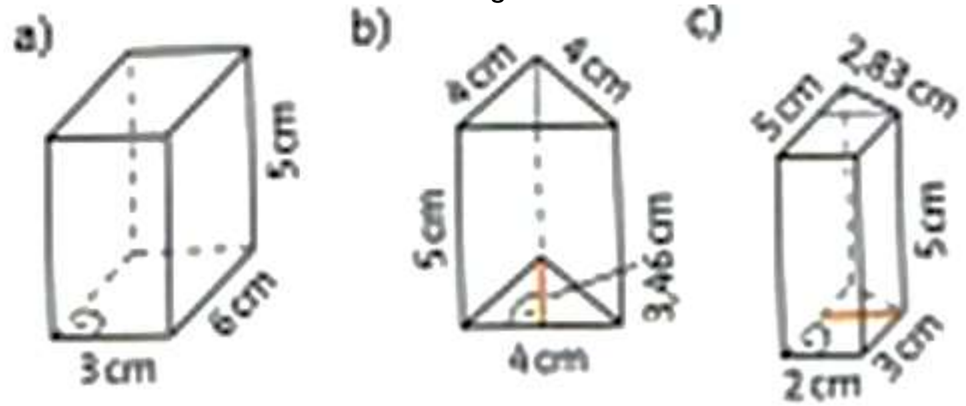
$b = 4{,}12$ cm

$c = 5{,}65$ cm

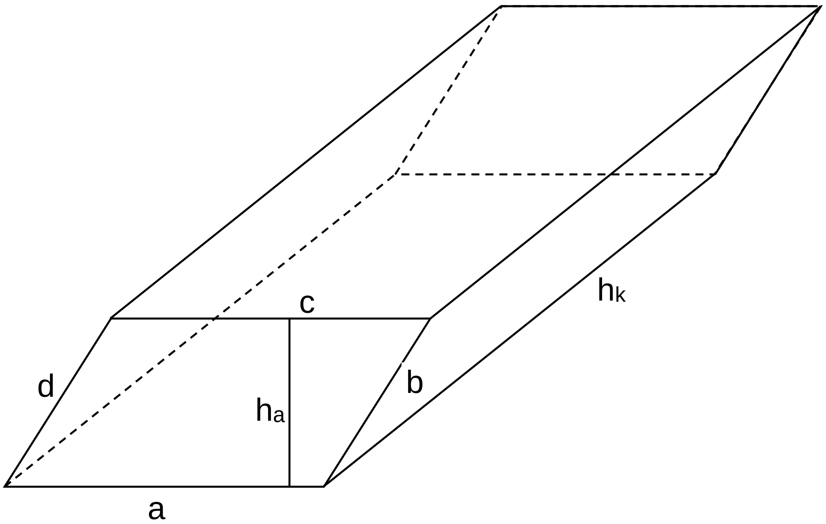
$h_a = 4$ cm

$h_k = 8$ cm

1. Berechne Oberfläche und Volumen der abgebildeten Prismen




2. Berechne die Oberfläche des Parallelogramm-Prismas!




a = 11 m

b = 5 m

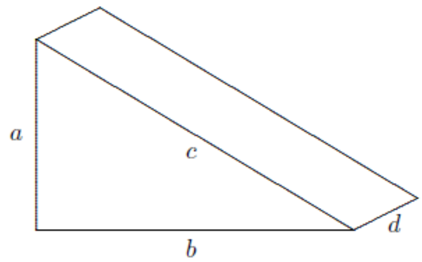
c = 11m

d = 5 m

$h_a$ = 4 m

$h_k$ = 40 m

3. Das Prisma hat die Kantenlängen: (in cm) a = 3, b = 4, c = 5, d = 9.
   Berechne die Oberfläche, das Volumen und die Gesamtkantenlänge.




4. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck mit a = 8,5 cm, b = 5 cm, c = 10,5 cm und $h_c$ = 4 cm. Wie hoch muss das Prisma sein, damit …
   a) das Volumen V = 168 $cm^3$ hat.
   b) die Oberfläche O = 234 $cm^2$ hat.

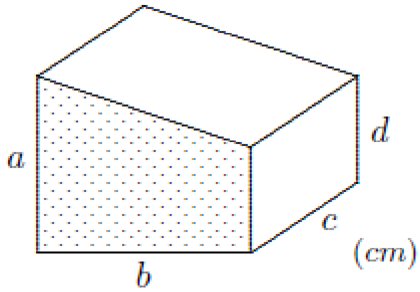
5. Wann heißt ein Körper „Prisma“?

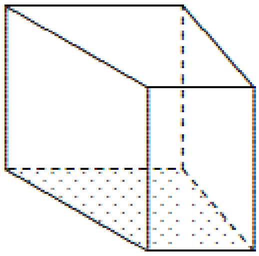
1. Ein Prisma hat als Grundfläche ein Parallelogramm mit a = 12,5 cm, b = 8,5 cm und der Höhe $h_a$ = 6 cm. Die Höhe des Prismas ist h = 12 cm.
   Berechne das Volumen und die Oberfläche

2. Ein Trapez hat eine Grundlinie von 9,4 cm, die Seite c misst 3,4 cm, die Höhe ist 5,6 cm lang und die Körperhöhe beträgt 6,74 cm.
   Wie groß ist sein Volumen?

3. Zeichne das Netz eines Prismas mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche!
   Kantenlänge: a = 2,5 cm
   Körperhöhe: h = 3 cm

4. Bestimme die fehlende Größe



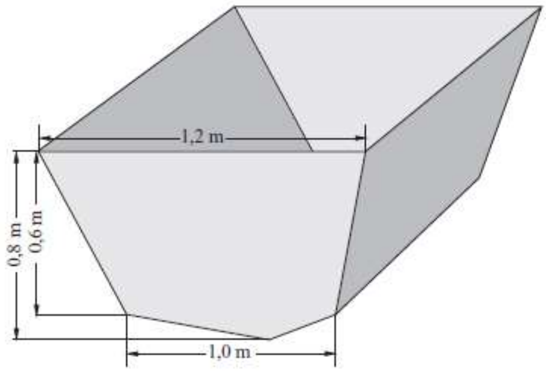



a = 3
b = 4
c = 2
d = 1
V = ?

b) a = ?
b = 5
c = 3
d = 2
V = 45 $cm^3$

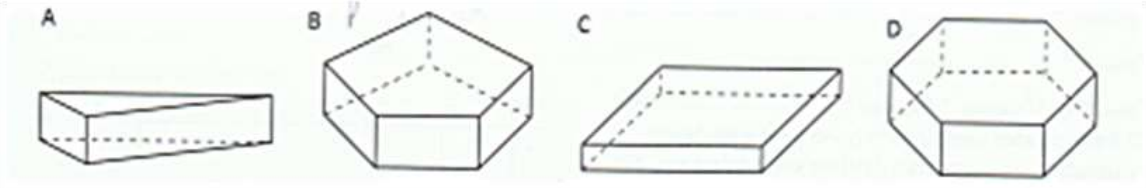
5. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem gleichschenkeligen Dreieck als Grundfläche und der Körperhöhe h!
   a = 13 cm; c = 10 cm; $h_c$ = 12 cm; h = 8,2 cm

6. Die Schaufel eines Radladers hat die rechts dargestellte Form. Sie ist innen 1,5 m breit. Mit dem Radlader sollen 45 $m^3$ Sand abtransportiert werden. Wie oft muss der Radlader mindestens fahren?



## Prismen Station 1 Lösungen

1. Bestimme die Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen. Schreibe zu jedem Bild, welche Grundfläche das Prisma hat.

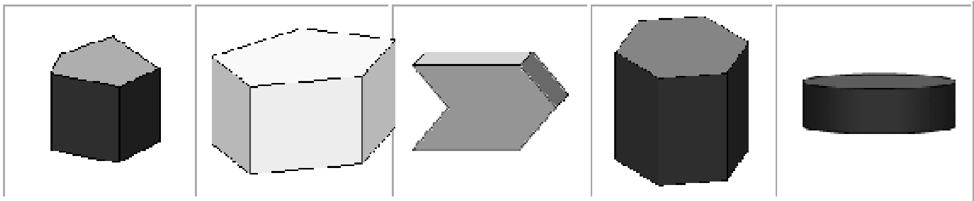



| Körper | Grundfläche | Name des Prismas | Anzahl der Ecken | Anzahl der Kanten | Anzahl der Flächen |
|---|---|---|---|---|---|
| A | Dreieck | Dreiecksprisma | 6 | 9 | 5 |
| B | Fünfeck | Fünfeckprisma | 10 | 15 | 7 |
| C | Viereck | Viereckprisma | 8 | 12 | 6 |
| D | Sechseck | Sechseckprisma | 12 | 18 | 8 |

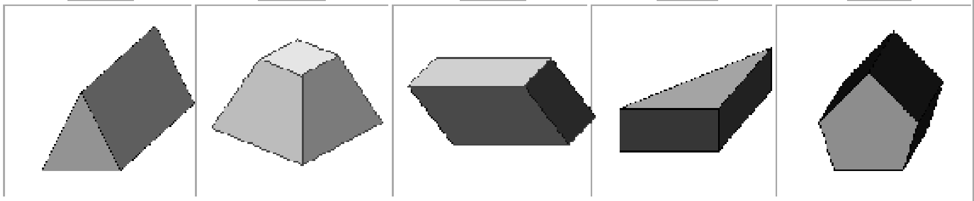
2. Hat die Grundfläche eines Prismas **n** Ecken, so besitzt das Prisma 2n Ecken. Die Anzahl der Kanten ist 3n. Die Anzahl der Flächen beträgt n + 2, da zu den Mantelflächen noch eine Deckfläche und eine Grundfläche gezählt werden müssen.

## Prismen Station 2 Lösungen

1. Welche der folgenden Körper sind Prismen? Kreuze an.

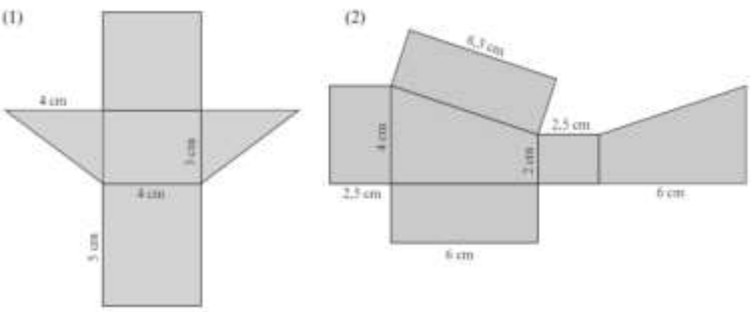


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | x | x | x | |



| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | | x | x | x |

2. Die Bilder (1) und (2) stellen die Netze zweier Prismen im Maßstab 1:2 dar.



**a)** Berechne die Oberflächeninhalte beider Prismen. Entnimm die benötigten Maße den Bildern und schreibe die Maße an die Figuren. Runde auf $cm^2$.

(1) $A_1$ = (5 cm + 3 cm + 4 cm) · 4 cm + 2 · 3 cm · 2 cm =
12 cm · 4 cm + 12 $cm^2$ = 48 $cm^2$ + 12 $cm^2$ = 60 $cm^2$;
$A_1 \approx 60\ cm^2$;

(2) $A_2$ = 2,5 cm · 4 cm + 6 cm · 2,5 cm + 6,3 cm · 2,5 cm + 2 · $(\frac{4+2}{2}\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm})$ +
2,5 cm · 2 cm =
10 $cm^2$ + 15 $cm^2$ + 15,75 $cm^2$ + 36 $cm^2$ + 5 $cm^2$ = 81,75 $cm^2$
$A_2 \approx 82\ cm^2$

**b)** Berechne die Volumina der Prismen. Runde hier entsprechend sinnvoll.

(1) Grundfläche ist das Dreieck mit der Fläche: (4 cm · 3 cm): 2 = 6 $cm^2$
Die Höhe beträgt hier 4 cm:
V = 6 $cm^2$ · 4 cm = 24 $cm^3$.

(2) die Grundfläche ist hier das Trapez mit der Fläche: $\left(\frac{4+2}{2}\ \mathrm{cm} \cdot 6\ \mathrm{cm}\right)$= 18 $cm^2$
Die Höhe beträgt hier 2,5 cm.
V = 18 $cm^2$ · 2,5 cm = 45 $cm^3$.

3. Ergänze die Lückenwörter
Ein Prisma ist ein geometrischer Körper.
Es hat eine Grundfläche und eine Deckfläche.
Dabei handelt es sich um Vielecke (z.B. Vierecke)
Diese sind deckungsgleich und zueinander parallel.
Die Seitenflächen sind in jedem Fall Rechtecke, diese stehen senkrecht zu Grundfläche und Deckfläche.

## Prismen Station 3 Lösungen

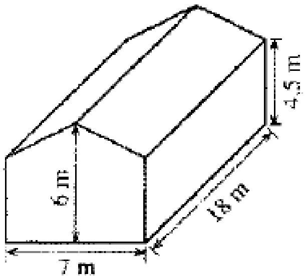
1. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem rechtwinkeligen Dreieck als Grundfläche und der Körperhöhe h!
a = 9 cm b = 12 cm c = 15 cm h = 4 cm
(Da der rechte Winkel des Dreiecks an C liegt, kann man a als Grundlinie betrachten und b als Höhe.)

$O = 2 \cdot G + M$
$O = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{2}\right) + (a + b + c) \cdot h$
$O = a \cdot b + (a + b + c) \cdot h$
$O = 9 \cdot 12 + (9 + 12 + 15) \cdot 4$
O = 108 $cm^2$ + 36 cm · 4 cm = 108 $cm^2$ + 144 $cm^2$ = **252 $cm^2$**

2. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem Trapez als Grundfläche und der Körperhöhe h!
a = 17 cm; b = 15 cm; c = 3 cm; d = 13 cm; $h_a$ = 12 cm; h = 8 cm

$O = 2 \cdot G + M = 2 \cdot \frac{(a+c) \cdot h_a}{2} + (a + b + c + d) \cdot h = (a + c) \cdot h_a + (a + b + c + d) \cdot h =$
(17 + 3) · 12 + (17 + 15 + 3 + 13) · 8 = 240 $cm^2$ + 48 cm · 8 cm = 240 $cm^2$ + 384 $cm^2$ = **624 $cm^2$**

3. Berechne das Volumen des abgebildeten Prismas




$V_{Quader} = V_1 = G \cdot h$

$V_1 = 18\ m \cdot 7\ m \cdot 4{,}5\ m = 567 m^3$

$V_2$ = Volumen des Prismas mit Dreiecksgrundfläche:

$V_2 = 1{,}5\ m \cdot 18\ m \cdot 7\ m \cdot \frac{1}{2} = 94{,}5\ m^3$

$V_{Prisma} = V_1 + V_2 = 567\ m^3 + 94{,}5\ m^3 = 661{,}5\ m^3$

Antwort: Das Volumen des Prismas beträgt $661{,}5\ m^3$.

4. Erläutere die Bedeutung dieser Formeln

$O = 2 \cdot G + h_k \cdot u$

Die Oberfläche (O) eines Prismas setzt sich aus dem Doppelten der Grundfläche (G) und der Mantelfläche zusammen. Die Mantelfläche ist ein Rechteck mit den Seitenlängen $h_k$ (Körperhöhe) und u (Umfang der Grundfläche).

$O = h_a \cdot a + h_k \cdot (a + b + c)$ $\quad (= 2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{2} + (a + b + c) \cdot h_k)$

Die Oberfläche (O) eines Dreieck-Prismas setzt sich aus dem Doppelten der Grundfläche (G) und der Mantelfläche zusammen. Die Grundfläche ist eine Dreiecksfläche, die nach der Formel $\frac{(h_a \cdot a)}{2}$ berechnet wird. Die Mantelfläche hat die Seitenlänge $h_k$ und a + b + c als Umfang des Dreieck.

5. Berechne die Oberfläche der Prismen

linke Seite: Rechteckprisma:

Berechnung der Grundfläche:

$A = a \cdot b$ $\qquad A = 3\ cm \cdot 2\ cm = \mathbf{6\ cm^2}$

Berechnung des Umfangs der Grundfläche:

$u = a + b + c + d$ $\qquad u = 3\ cm + 2\ cm + 3\ cm + 2\ cm = \mathbf{10\ cm}$

Berechnung der Mantelfläche:

$M = u \cdot h_k$ $\qquad M = 10\ cm \cdot 5\ cm = \mathbf{50\ cm^2}$

Berechnung der Gesamtoberfläche:

$O = 2 \cdot G + M$ $\qquad O = 2 \cdot 6\ cm^2 + 50\ cm^2 = \mathbf{62\ cm^2}$

rechte Seite: Dreiecksprisma:

Berechnung der Grundfläche:

$A = \frac{g \cdot h_g}{2}$ $\qquad A = \frac{5\ cm \cdot 4\ cm}{2} = \mathbf{10\ cm^2}$

Berechnung des Umfangs der Grundfläche:

$u = a + b + c$ $\qquad u = 5\ cm + 4{,}12\ cm + 5{,}65\ cm = \mathbf{14{,}77\ cm}$

Berechnung der Mantelfläche:

$M = u \cdot h_k$ $\qquad M = 14{,}77\ cm \cdot 8\ cm = \mathbf{118{,}16\ cm^2}$

Berechnung der Gesamtoberfläche:

$O = 2 \cdot G + M$ $\qquad O = 2 \cdot 10\ cm^2 + 118{,}16\ cm^2 = \mathbf{138{,}16\ cm^2}$

## Prismen Station 4 Lösungen

1. Berechne Oberfläche und Volumen der abgebildeten Prismen

a) $O = \quad 2 \cdot (3\ cm \cdot 6\ cm + 3\ cm \cdot 5\ cm + 6\ cm \cdot 5\ cm) =$

$2 \cdot (18 + 15 + 30) = 2 \cdot 63\text{ cm}^2 = \mathbf{126\text{ cm}^2}$

$V = 3\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} = \mathbf{90\text{ cm}^3}$

b) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}46\text{ cm} + 3 \cdot 4\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 13{,}84\text{ cm}^2 + 60\text{ cm}^2 = \mathbf{73{,}84\text{ cm}^2}$

$V = \frac{1}{2} \cdot 4\text{ cm} \cdot 3{,}46\text{ cm} \cdot 5\text{ cm} = 6{,}92\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{34{,}6\text{ cm}^3}$

c) $O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (5\text{ cm} + 3\text{ cm}) \cdot 2\text{ cm} + 5\text{ cm} \cdot (5\text{ cm} + 2\text{ cm} + 3\text{ cm} + 2{,}83\text{ cm}) =$

$16\text{ cm}^2 + 5\text{ cm} \cdot 12{,}83\text{ cm} = 16\text{ cm}^2 + 64{,}15\text{ cm}^2 = \mathbf{80{,}15\text{ cm}^2}$

$V = 8\text{ cm}^2 \cdot 5\text{ cm} = \mathbf{40\text{ cm}^3}$

2. Berechne die Oberfläche des Parallelogramm-Prismas!

Berechnung der Grundfläche A:

$A = g \cdot h_g$ $\quad A = 11\text{ m} \cdot 4\text{ m} = \mathbf{44\text{ m}^2}$

Berechnung des Umfangs U der Grundfläche:

$U = a + b + c + d$ $\quad U = 11\text{ m} + 5\text{ m} + 11\text{ m} + 5\text{ m} = \mathbf{32\text{ m}}$

Berechnung der Mantelfläche M:

$M = u \cdot h_k$ $\quad M = 32\text{ m} \cdot 40\text{ m} = \mathbf{1280\text{ m}^2}$

Berechnung der Gesamtoberfläche G:

$O = 2 \cdot G + M$ $\quad O = 2 \cdot 44\text{ m}^2 + 1280\text{ m}^2 = \mathbf{1368\text{ m}^2}$

3. Das Prisma hat die Kantenlängen: (in cm) a = 3, b = 4, c = 5, d = 9.
Berechne die Oberfläche, das Volumen und die Gesamtkantenlänge.

$O = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} + (a + b + c) \cdot d = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} + (3\text{ cm} + 4\text{ cm} + 5\text{ cm}) \cdot 9\text{ cm}$

$= 12\text{ cm}^2 + 12\text{ cm} \cdot 9\text{ cm} = 12\text{ cm}^2 + 108\text{ cm}^2 = 120\text{ cm}^2$

$V = \frac{ab}{2} \cdot d$ $\quad V = \frac{3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm}}{2} \cdot 9\text{ cm} = 54\text{cm}^3$

$K = 2(a + b + c) + 3d$ $\quad K = 2(3 + 4 + 5) + 3 \cdot 9 = 51\text{ cm}$

4. Die Grundfläche eines Prismas ist ein Dreieck mit a = 8,5 cm, b = 5 cm, c = 10,5 cm und $h_c$ = 4 cm. Wie hoch muss das Prisma sein, damit …

a) das Volumen V = 168 cm³ hat?

$G = \frac{c \cdot h_c}{2}$ $\quad G = \frac{8{,}5\text{cm} \cdot 5\text{cm}}{2} = 21{,}25\text{ cm}^2$

$V : G = h$ $\quad 168\text{ cm}^3 : 21{,}25\text{ cm}^2 = 7{,}90588..\text{ cm} \approx 7{,}91\text{ cm}$

Das Prisma muss eine Höhe von 7,9 cm haben.

b) die Oberfläche O = 234 cm² hat?

$M = 234\text{ cm}^2 - 2 \cdot 21{,}25\text{ cm}^2 = 191{,}5\text{ cm}^2$

$U = 8{,}5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 10{,}5\text{ cm} = 24\text{ cm}$

$M = U \cdot h$ $\quad h = M : U$ $\quad h = 191{,}5\text{ cm}^2 : 24\text{ cm} = 7{,}9791.. \approx 7{,}98\text{ cm}$

5. Wann heißt ein Körper „Prisma"?

Ein Prisma hat eine Grundfläche und eine Deckfläche. Diese sind gleich groß und haben die gleiche Form. Alle Seitenflächenflächen eines Prismas sind Rechtecke.

## Prismen Station 5 Lösungen

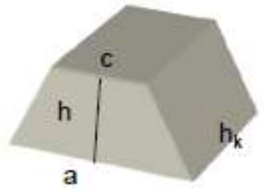
1. Ein Prisma hat als Grundfläche ein Parallelogramm mit a =12,5 cm, b = 8,5 cm und der Höhe $h_a$ = 6 cm. Die Höhe des Prismas ist h = 12 cm.
Berechne das Volumen und die Oberfläche

$G = a \cdot h_a \quad = 12{,}5\text{ cm} \cdot 6\text{ cm} \quad = 75\text{ cm}^2$

$V = G \cdot h \quad = 75\text{ cm}^2 \cdot 12\text{ cm} \quad = 900\text{ cm}^3$

U = 2 · a + 2 · b = 2 ·12,5 cm + 2 · 8,5 cm = 42 cm
M = U · h = 42 cm · 12 cm = 504 cm²
O = 2 · G + M = 2 · 75 cm² + 504 cm² = 654 cm²

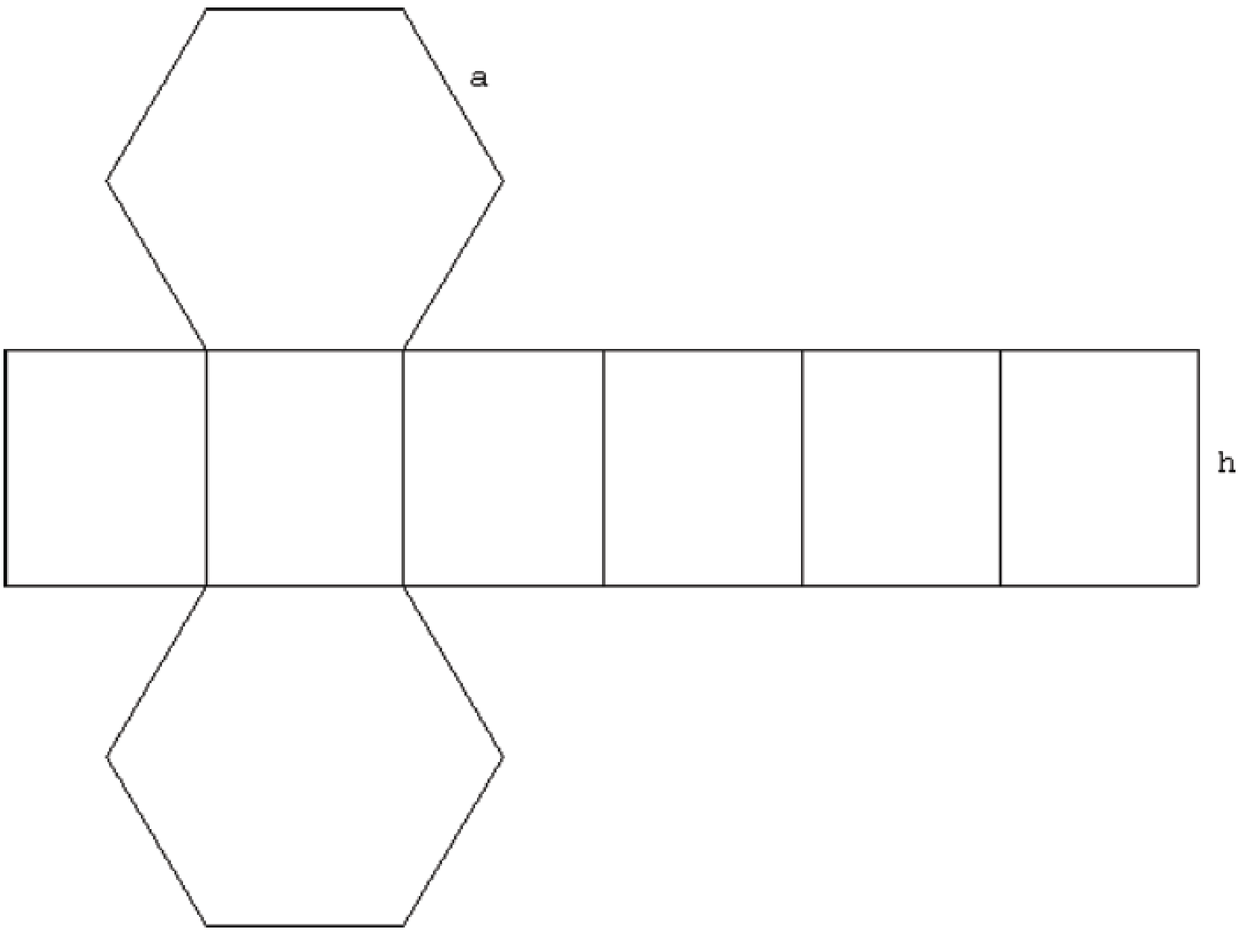
2. Ein Trapez hat eine Grundlinie von 9,4 cm, die Seite c misst 3,4 cm, die Höhe ist 5,6 cm lang und die Körperhöhe beträgt 6,74 cm.
Wie groß ist sein Volumen?



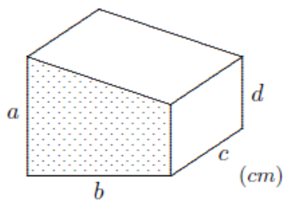

$V = G \cdot h_k$ $V = \frac{(a + c)}{2} \cdot h \cdot h_k$

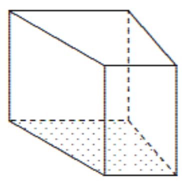
$V = \frac{(9{,}4 + 3{,}4)}{2}\, cm \cdot 5{,}6\, cm \cdot 6{,}74\ \mathrm{cm} = 6{,}4\ \mathrm{cm} \cdot 37{,}744\mathrm{cm}^2$
$= 241{,}5616\ \mathrm{cm}^3$

3. Zeichne das Netz eines Prismas mit einem regelmäßigen Sechseck als Grundfläche!
Kantenlänge: a = 2,5 cm
Körperhöhe: h = 3 cm




4. Bestimme die fehlende Größe



a = 3
b = 4

b) a = 4 cm
b = 5

| | |
|---|---|
| $c = 2$ | $c = 3$ |
| $d = 1$ | $d = 2$ |
| $V = 16\ cm^3$ | $V = 45\ cm^3$ |

a) Rechnung:

Die Grundfläche besteht aus einem Rechteck (mit den Kantenlängen b = 4 cm und d = 1 cm) und einem Dreieck (mit der Grundlinie b = 4 cm und der Höhe $h_b = a - d = 2$ cm).

Grundfläche des Prismas:

$G = 4\ cm \cdot 1\ cm + \frac{(4\ cm \cdot 2\ cm)}{2} = 4\ cm^2 + 4\ cm^2 = 8\ cm^2$

$V = G \cdot h = (G \cdot c) = 8\ cm^2 \cdot 2\ cm = 16\ cm^3$

b) Rechnung:

$V = \left(b \cdot d + \frac{b \cdot (a-d)}{2}\right) \cdot c$

$45\ cm^2 = \left(5\ cm \cdot 2\ cm + \frac{5\ cm \cdot (a-2\ cm)}{2}\right) \cdot 3$ nach a auflösen:

$45\ cm^2 = \left(10\ cm^2 + \frac{5acm - 10cm^2}{2}\right) \cdot 3$

$45\ cm^2 = 30\ cm^2 + 7{,}5 \cdot a\ cm - 15\ cm^2$

$45 - 30 + 15 = 7{,}5\ a$

$30 = 7{,}5\ a \quad | : 7{,}5$

$4 = a \quad \rightarrow a = 4\ cm$

5. Berechne die Oberfläche eines Prismas mit einem gleichschenkeligen Dreieck als Grundfläche und der Körperhöhe h!

$a = 13$ cm; $c = 10$ cm; $h_c = 12$ cm; $h = 8{,}2$ cm

$O = 2 \cdot G + M$

$O = c \cdot h_c + (2 \cdot a + c) \cdot h$

$O = 10 \cdot 12 + (2 \cdot 13 + 10) \cdot 8{,}2 = 120 + 36 \cdot 8{,}2 = 120 + 295{,}2$ **$= 415{,}2\ cm^2$**

6. Die Schaufel eines Radladers hat die rechts dargestellte Form. Sie ist innen 1,5 m breit. Mit dem Radlader sollen 45 $m^3$ Sand abtransportiert werden. Wie oft muss der Radlader mindestens fahren?

Die Grundfläche des Prismas besteht aus einem Trapez und einem Dreieck.

$A_{Trapez} = (1{,}2\ m + 1\ m) : 2 \cdot 0{,}6\ m = 0{,}66\ m^2$

$A_{Dreieck} = 1\ m \cdot 0{,}2\ m : 2 = 0{,}1\ m^2$

$A_G = 0{,}76\ m^2$

$V = 0{,}76\ m^2 \cdot 1{,}5\ m = 1{,}14\ m^3$

$45\ m^3 : 1{,}14\ m^3 = 39{,}473\ldots$

Antwort: Er muss mindestens 40-mal fahren.