

Kreis und Tangente

Tangenten im Alltag:

Tangenten haben bei allen Kreisbewegungen eine besondere Bedeutung, egal ob dies Fahrten im Karussell sind, die Funken beim Schleifen mit einer Drehscheibe oder im Sport ein Hammer oder ein Diskus aus der Drehbewegung heraus geworfen wird. Bevor du eine Anwendung näher kennenlernen kannst, sollst du dir zunächst einiges überlegen und ausprobieren.

1. Eine verschiebbare Sekante

A) Vorbereitung:

Führe folgende Konstruktionsschritte durch. Benenne nach jedem Konstruktionsschritt die neu hinzugekommenen Punkte, um den Überblick zu behalten:

1. Zeichne einen Kreis k mit beliebigem Radius um einen Mittelpunkt M
2. Wähle einen beliebigen Punkt T , der auf dem Kreis liegt, aus und zeichne die Strecke $[MT]$. (Wie nennt man diese Strecke?)
3. Zeichne einen Punkt A so, dass
 - A außerhalb des Kreises liegt und
 - die Gerade TA eine Sekante ist.
4. Markiere den zweiten Schnittpunkt von TA mit dem Kreis k und benenne ihn mit S .
5. Lass den Winkel MTA anzeigen. (Eventuell \widehat{ATM} , der Winkel soll kleiner als 90° sein)

B) Neuigkeiten entdecken

Nun sollst du mit Hilfe der Zeichnung einen neuen Satz herausfinden, der uns bei anderen Problemstellungen helfen kann.

- i. Packe den Punkt A mit der Zange und verschiebe ihn so, dass sich der Punkt S auf den Punkt T zubewegt. Beobachte dabei den Winkel MTA .
- ii. Eine Position von A ergibt einen besonderen Fall. Betrachte ihn genau. (Betrachte nur den Bereich $0^\circ < \text{Winkel } MTA < 180^\circ$)

Fasse das Ergebnis zusammen, indem du folgende Tabelle ins Heft oder ein Worddokument überträgst und dort ergänzt!


Lagebeziehung zw. S und T	Winkel MTA	Lagebez. zw. Kreis k und Gerade TA
		Gerade TA ist eine
S = T		Gerade TA ist eine
		Gerade TA ist eine



2a) Lot auf dem Radius eines Kreises

Vorbereitung:

Führe folgende Konstruktionsschritte durch. Benenne nach jedem Konstruktionsschritt die neu hinzugekommenen Punkte, um den Überblick zu behalten:

1. Zeichne einen Kreis k mit beliebigem Radius um einen Mittelpunkt M
2. Wähle einen beliebigen Punkt T, der auf dem Kreis liegt, aus und zeichne die Strecke [MT]. (Achte darauf, dass die Form des Punktes T KEIN ausgefüllter Kreis ist, dies ist wichtig für Aufgabe2).
3. Zeichne das Lot t auf die Strecke [MT] durch den Punkt T
Tipp: IN Euklid kannst du ein Lot über das Menü Konstruktion -->

Lot/Senkrechte oder das Symbol  erstellen. Du musst zuerst den Punkt durch den das Lot gehen soll anklicken, danach die Gerade bzw. Strecke auf der das Lot stehen soll.

4. Trage den rechten Winkel zwischen dem Lot t und [MT] ein. (TIPP: Um über  einen Winkel anzeigen zu können benötigst du drei Punkte. Es reicht NICHT mit der Maus ungefähr auf das Lot zu zielen! Du erhältst den Punkt auf einer Linie über Zeichnen--> Punkt auf einer Linie oder über die Ikone  bei der Symbolleiste "Konstruieren".)

2b) Neuigkeiten entdecken

Beantworte folgende Frage (ins Heft bzw. Worddokument):

Wie viele Schnittpunkte hat das Lot mit dem Kreis? Wie nennt man also die Gerade t in Bezug zum Kreis?

Hast du die Antwort auf die beiden Fragen? Du kannst die Korrektheit in deiner

Euklid-Datei selbst überprüfen, indem du in Euklid den/die Schnittpunkt/e von dem Lot mit dem Kreis anzeigen lässt. Es kann sein, dass sich nicht viel in deiner Zeichnung ändert. Beachte jedoch die Form der Punkte. Schnittpunkte werden in Euklid zunächst immer als ausgefüllte Kreise symbolisiert)

3.) Zusammenfassung - Satz von der Tangente

a) und b) haben natürlich etwas miteinander zu tun. Aus den beiden Ergebnissen lässt sich der Satz der Tangente formulieren. Die Voraussetzung ist dabei hinreichend und notwendig (eine Richtung ist a) die andere Richtung ist b))

Aufgabe: Neuigkeiten zusammenfassen und strukturieren

Versuche den Satz der Tangente zu formulieren.



4.) Konstruktion der Tangente

Der Satz von der Tangente ermöglicht die Konstruktion von Tangenten bei verschiedenen Aufgabenstellungen. Es gibt drei Typen von Aufgabenstellungen.

Aufgabe: Neuigkeiten anwenden

4a) Aufgabentyp (leicht): Wie konstruiert man die Tangente in einem gegebenen Berührungspunkt B?

konkrete Aufgabe: Konstruiere die Tangente an den Kreis $k(M; 5 \text{ cm})$ mit $M(-1/3)$ durch den Berührungspunkt $B(3/0)$.

Tipp zu Euklid: Ein Punkt lässt sich über die Ikone  (Reiter Konstruktion) durch Koordinaten festlegen. Das Koordinatensystem lässt sich über die Ikone  (Reiter Messen & Rechnen) sichtbar machen. Liegt der Teil, den du zeichnen sollst sehr am Rand, kannst du den Ursprung des Koordinatensystems mit gedrückter linker Maustaste verschieben.

Tipp: Hast du dir eine Skizze zur Problemstellung gemacht?

Denke an den Satz von der Tangente! (bzw. an Aufgabe 2)

4b) Aufgabentyp (mittel): Wie konstruiert man die Tangenten parallel zu einer gegebenen Geraden g ?

konkrete Aufgabe: Konstruiere die Tangenten an den Kreis $k(M; 3 \text{ cm})$ mit $M(-4/-2)$ parallel zur Gerade AB mit $A(3/-2)$ und $B(0/4)$.

Tipp:

Hast du dir eine Skizze zur Problemstellung gemacht?

Das Problem wäre gelöst, wenn du die passenden Berührungspunkte finden würdest, denn dann kannst du Vorgehen wie bei Aufgabe 4i. Überlege welche Eigenschaften die Berührungspunkte erfüllen müssen!

Noch n Tipp: Die Berührungspunkte müssen folgende Eigenschaften erfüllen:

- Sie müssen auf dem Kreis liegen.
- Sie sind der Endpunkt des Radius, der senkrecht auf die gesuchte Tangente steht. Da g parallel zur gesuchten Tangente liegt, muss die Verlängerung und des Radius auch senkrecht auf g stehen!

4c) Aufgabentyp (schwer): Wie konstruiert man die Tangenten durch einen gegebenen Punkt A außerhalb des Kreises?

konkrete Aufgabe: Konstruiere die Tangenten an den Kreis $k(M; 4\text{cm})$ mit $M(6/5)$ durch den Punkt $A(12/4)$.

Tipp: Hast du dir eine Skizze zur Problemstellung gemacht?

Das Problem wäre gelöst, wenn du die passenden Berührungspunkte finden würdest, denn dann kannst du Vorgehen wie bei Aufgabe 4i. Überlege welche Eigenschaften die Berührungspunkte erfüllen müssen!

Noch n Tipp: Die Berührungspunkte müssen folgende Eigenschaften erfüllen:

Sie müssen auf dem Kreis liegen.

Sie sind der Endpunkt des Radius, der senkrecht auf die gesuchte Tangente steht.

Damit kommen wir noch nicht viel weiter. Deshalb ein ganz anderer Tipp:

Es gibt wieder zwei Tangenten als Lösungen, dementsprechend auch zwei Berührungspunkte T_1 und T_2 .

Suche eine Symmetrieachse bezüglich der die beiden Punkte T_1 und T_2 symmetrisch zueinander sind.

Noch n Tipp: Die Geraden MA ist die Symmetrieachse der Punkte T_1 und T_2 symmetrisch zueinander.

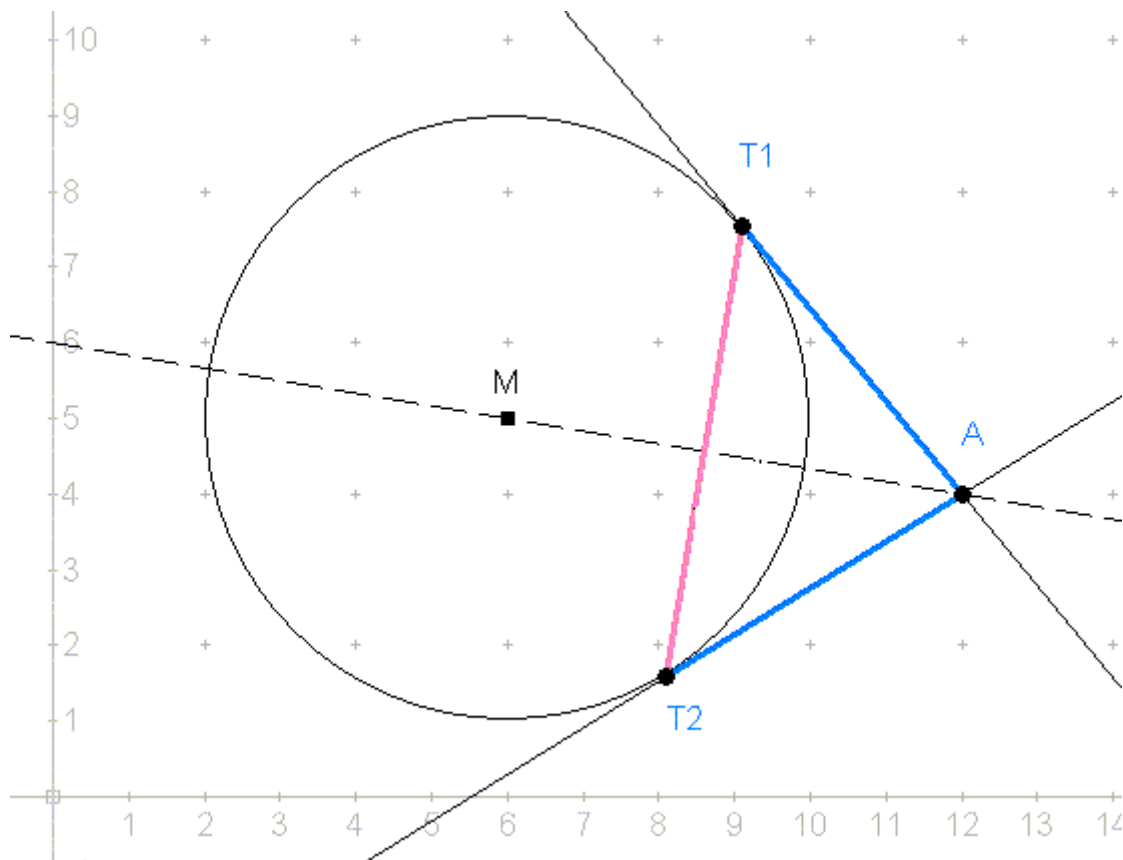
In der Abbildung rechts ist die Strecke MA eingezeichnet. Wie groß ist der Winkel MT_1A bzw. MT_2A . Zeichne ihn in die Skizze ein. Schau es dir genau an. Erinnerung dich vielleicht an die 7. Klasse (Grundwissen, das wir bereits wiederholt haben, etwas ganz bekanntes!)

Letzter Tipp: Die beiden Winkel MT_1A bzw. MT_2A sind 90° .

Der Satz des Thales hilft!

5. Tangentenabschnitt und Berührsehne

Mehr oder weniger zum Abschluss des Kapitels noch zwei Namensfestlegungen. Solche Festlegungen sind völlig normal, wenn man eine "Sache" öfter verwendet. Betrachte folgende Abbildung. Es ist die Lösung von Aufgabe 4, jedoch ohne die Hilfslinien der Konstruktion.



Die beiden blauen Strecken $[T_1A]$ und $[T_2A]$ nennt man Tangentenabschnitte. Die rosa Strecke $[T_1T_2]$ nennt man Berührsehne.

Aufgabe: Eigenschaften von Tangentenabschnitte und Berührsehne

- Übertrage die Graphik und die obige Namensdefinition in deinen Heft. Erkläre warum die Namen genau so gewählt wurden (und nicht z.B. ein Rosawunderschönlinie heißt).
- Versuche verschiedene Eigenschaften von den Tangentenabschnitten und der Berührsehne zu finden. Begründe diese Eigenschaften

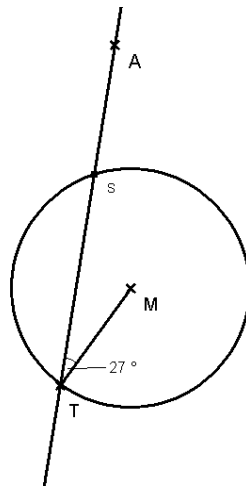
Tipp: Betrachte genau die Abbildung! Welche besondere Eigenschaft hat die Gerade MA bezüglich der Punkte und T1 und T2?

Noch n Tipp: MA ist Symmetrieachse!!!

Die Eigenschaften der Achsensymmetrie (Grundwissen!) liefern dir genau die gesuchten Eigenschaften!

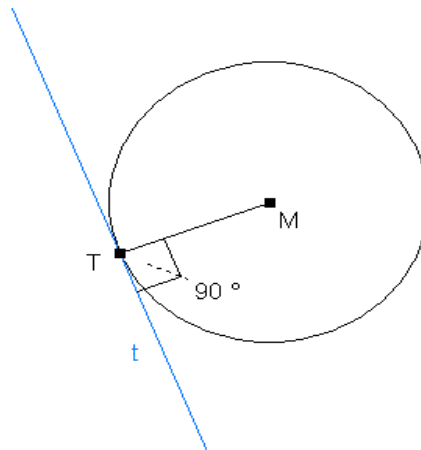
1) a) Eine verschiebbare Sekante

So sollte deine Zeichnung aussehen, wenn du alle Schritte der Vorbereitung durchgeführt hast:



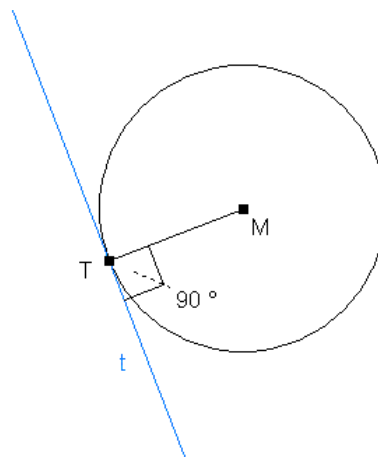
2a) Lot auf dem Radius eines Kreises

So sollte deine Zeichnung aussehen, wenn du alle Schritte der Vorbereitung durchgeführt hast:



3.) Zusammenfassung - Satz von der Tangente

Eine Gerade t durch einen Punkt $T \in k(M;r)$ ist genau dann Tangente, wenn $t \perp MT$ ist, d.h., wenn die Gerade und der zugehörige Radius senkrecht zueinander stehen.

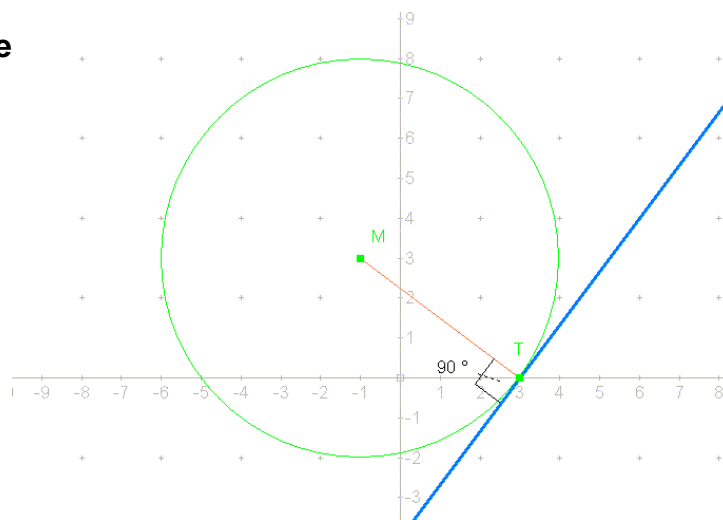


4.) Konstruktion der Tangente

4a) allgemeine Lösungsstrategie:

- Die gesuchten Tangenten ist das Lot auf den Radius durch den Berührungspunkt T

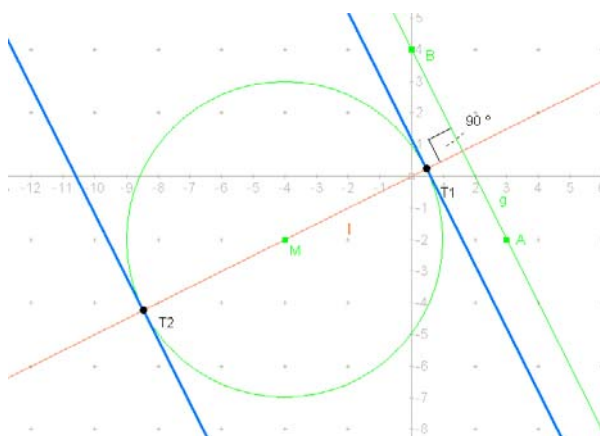
4a) Lösung der konkreten Aufgabe



4b) allgemeine Lösungsstrategie:

- Konstruiere das Lot l zu g durch den Mittelpunkt M. Es schneidet den Kreis in den (Berühr-)Punkten T1 und T2.
- Die gesuchten Tangenten stehen senkrecht auf dem Lot l durch den Mittelpunkt in den Punkten T1 und T2.
- (oder die Parallelen zu g durch T1 und T2 sind die gesuchten Tangenten)

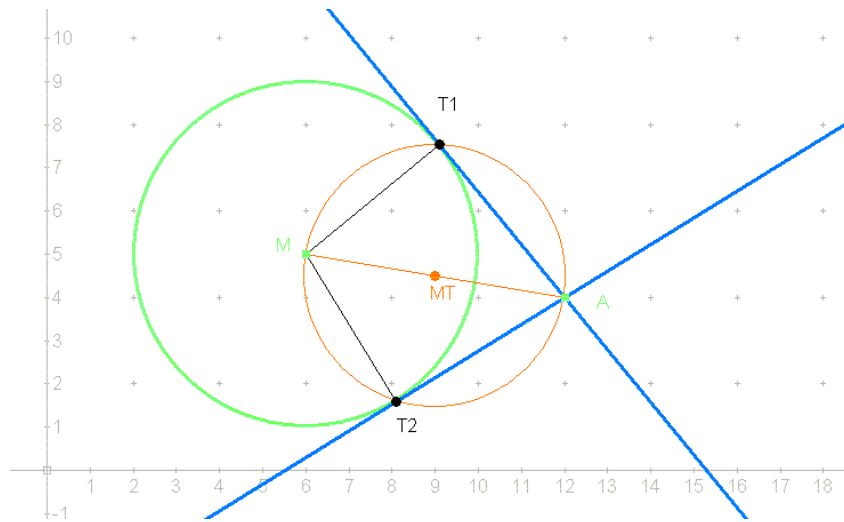
4b) Lösung der konkreten Aufgabe:



4c) allgemeine Lösungsstrategie:

- Konstruiere über [MA] den Thaleskreis
- Die Schnittpunkte des Thaleskreises mit dem Kreis k sind die Berührungspunkte T1 und T2.
- Die Geraden AT₁ und AT₂ sind die gesuchten Tangenten

Lösung der konkreten Aufgabe:



- Die beiden Tangentenabschnitte $[T_1A]$ und $[T_2A]$ sind gleich lang.
Begründung: T_1 und T_2 sind symmetrisch zur Achse MA . Symmetrische Punkte sind zu jedem beliebigen Punkt auf der Achse gleich weit entfernt.
- Die **Berührsehne** $[T_1T_2]$ steht senkrecht auf der Achse und wird durch die Achse halbiert.
Begründung: T_1 und T_2 sind symmetrisch zur Achse MA . Die Strecke zwischen zueinander symmetrischen Punkten steht senkrecht auf der Achse und wird durch die Achse halbiert.

