Geraden und Winkel am Kreis

Tangentenviereck

Aufgabe 1: Wiederholung Geometrie 7. Klasse - Dreiecke:

Beantworte folgende Fragen

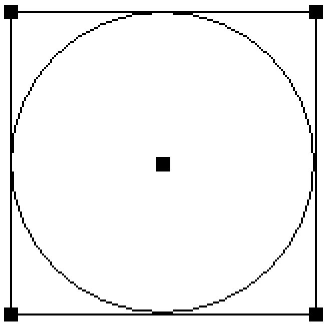
- Wie findest du den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks?
- Wie findest du den Schwerpunkt eines Dreiecks?
- Wie findest du den Inkreismittelpunkt eines Dreiecks?

Tipp: Denke an die Dreieckstransversalen (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende, Höhen und Seitenhalbierende)

Aufgabe 2: Inkreis eines Vierecks

Konstruiere zu einem beliebigen Dreieck den Inkreis! (Falls du hierbei Probleme hast, arbeite nochmals genau Aufgabe 1 durch)

Aufgabe 3



Gibt es zu jedem Viereck einen Inkreis?
Begründe knapp und stichhaltig und veranschauliche mit Beispielen.

Tipps: Eine möglicher Weg zu einer Begründung geht über den Satz vom Inkreismittelpunkt am Dreieck. Versuche ihn auf das Viereck zu übertragen und probiere es an zwei bis drei Beispielen aus.

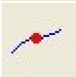
Wenn man den Satz vom Inkreismittelpunkt am Dreieck überträgt, müsste der Mittelpunkt des Inkreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden sein. Konstruiere den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden in einem Rechteck, oder einem Drachenviereck.

Aufgabe 4: Tangentenviereck

Vorbereitung:

Führe folgende Konstruktionsschritte durch. Benenne nach jedem Konstruktionsschritt die neu hinzugekommenen Punkte, um den Überblick zu behalten:

1. Zeichne einen Kreis k mit beliebigen Radius um einen Mittelpunkt M. (Der Radius sollte nicht zu groß und der Mittelpunkt in der Mitte gewählt werden.)
2. Wähle vier beliebige Punkte T1 bis T4 auf dem Kreis.
   Hinweis: Es reicht nicht mit der Maus ungefähr auf die Kreislinie zu

zielen! Du erhältst den Punkt auf einer Linie über Zeichnen--> Punkt auf einer Linie oder über die Ikone  bei der Symbolleiste "Konstruieren".

3. **Konstruiere** durch alle vier Punkte T1 bis T4 Tangenten an den Kreis (Tipp: )
4. Die vier Schnittpunkte der Tangenten ergaben ein die Eckpunkte eines Vierecks. Markiere und benenne die Eckpunkte mit A,B,C,D. Markiere und benenne die Seiten des Vierecks mit a,b,c,d.
   Hinweis: Die Seiten eines Vierecks sind Strecken, keine Geraden!!
   (Tipp: )
5. Markiere die Eckpunkte und Seiten Siten des Vierecks mit Farbe.

Aufgabe 5 frische Neuigkeiten:
Nun sollst du mit Hilfe der Zeichnung einen neuen Satz herausfinden, der uns bei anderen Problemstellungen helfen kann

1. Lasse die Längen der Strecken a,b,c,d anzeigen.
2. Verschiebe einen (oder mehrere) der Punkte T1 - T4. (Sie sind an die Kreislinie gebunden). Beobachte dabei die angezeigten Streckenängen. Fällt dir etwas auf?
3. Fülle für vier unterschiedliche Positionen von T1 - T4. die Tabelle aus. Betrachte die Werte genau. Was fällt dir auf? Ergänze die Tabelle um zwei weitere geeignete Spalten um deine Vermutung zu bestätigen.

Tipp: **Die geeignete Spalten sind die Summen der jeweils gegenüberliegenden Streckenlängen, d.h.**
Spalte 5: a+c
Spalte 6: b+d

Position	**a in cm**	**b in cm**	**c in cm**	**d in cm**		
1						
2						
3						
4						

Aufgabe 6) Zusammenfassung - Satz vom Tangentenviereck

Teilaufgabe b müsste dir Mut geben, eigentlich schon fast Gewissheit für eine Behauptung. Natürlich hat die Behauptung auch eine Voraussetzung.

Aufgabe 6 ein neuer Satz:

a) Formuliere einen neuen Satz, den Satz vom Tangentenviereck

b) Beweise den Satz und seinen Kehrsatz

Aufgabe 7) Konstruktion eines Tangentenvierecks

Aufgabe 7a (leicht):

a) Konstruiere ein Tangentenviereck mit folgenden Eigenschaften a= 5 cm; b= 3,6 cm; f = 6,4 cm; $\alpha = 65°$

Aufgabe 7b)

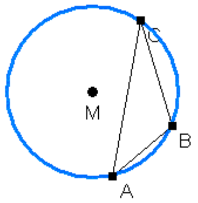
Speichere das Ergebnis aus Teilaufgabe a) unter dem Namen kap4_aufg6ii.geo ab.
Entferne danach alle Hilfslinien, so dass nur das Tangentenviereck übrig bleibt.
Konstruiere nun den Inkreis des Tangentenvierecks.

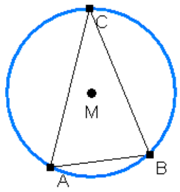
Aufgabe 7c (schwer):

i) Konstruiere ein Tangentenviereck mit folgenden Eigenschaften b= 3,5 cm; c = 7,5cm; r= 2,4cm; $\gamma = 125°$, wobei r der Radius den Inkreises ist.

Aufgabe 1:Umkreis eines Dreiecks

Der Umkreis eines Dreiecks ist der Kreis, auf dem alle drei Ecken des Dreiecks so liegen, dass das Dreieck innerhalb des Kreises liegt (siehe folgende 2 Beispiele)



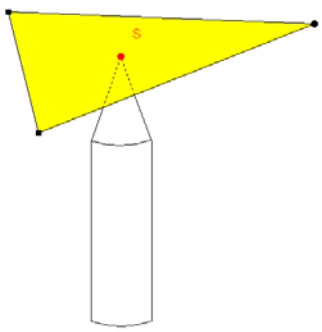


Wie findest du den Umkreismittelpunkt eines Dreiecks?

Noch ein Tipp: Denke an die Dreieckstransversalen (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende, Höhen und Seitenhalbierende)

b) Schwerpunkt eines Dreiecks

Wenn man versuchst ein Dreieck auf einer Bleistiftspitze auszubalancieren, befindete es sich genau dann im Gleichgewicht, wenn die Bleistiftspitze unterhalb des Schwerpunkt des Dreiecks ist.

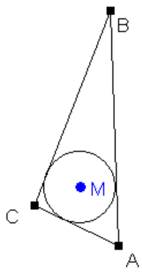


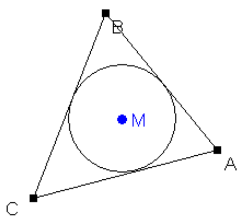
Wie findest du den Schwerpunkt eines Dreiecks?

Noch ein Tipp: Denke an die Dreieckstransversalen (Mittelsenkrechten, Winkelhalbierende, Höhen und Seitenhalbierende)

c) Inkreis eines Dreiecks

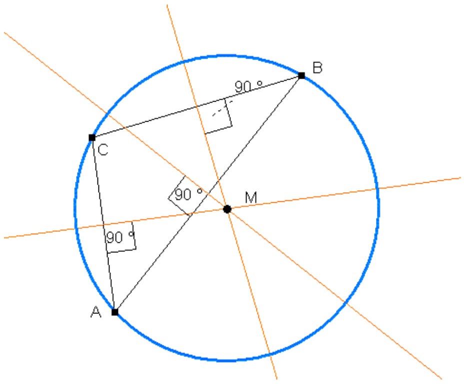
Der Inkreis eines Dreiecks ist der Kreis, der innerhalb des Dreieck so liegt, dass der Kreis **alle** drei Seiten des Dreiecks berührt (siehe folgende 2 Beispiele).





Umkreis eines Dreiecks

Satz vom Umkreis eines Dreiecks

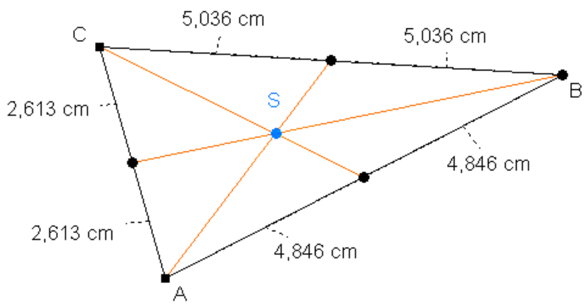


Jedes Dreieck besitzt einen Umkreis; sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt M der **Mittelsenkrechten** der Dreiecksseiten.

b) Schwerpunkt eines Dreiecks

Satz vom Schwerpunkt eines Dreiecks

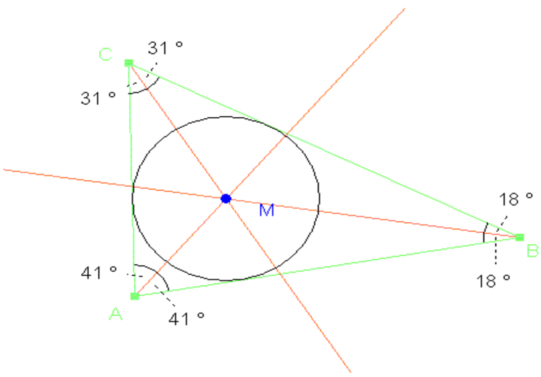
In **jedem** Dreieck schneiden sich die drei **Seitenhalbierenden** in genau einem Punkt, dem Schwerpunkt des Dreiecks.



c) Inkreis eines Dreiecks

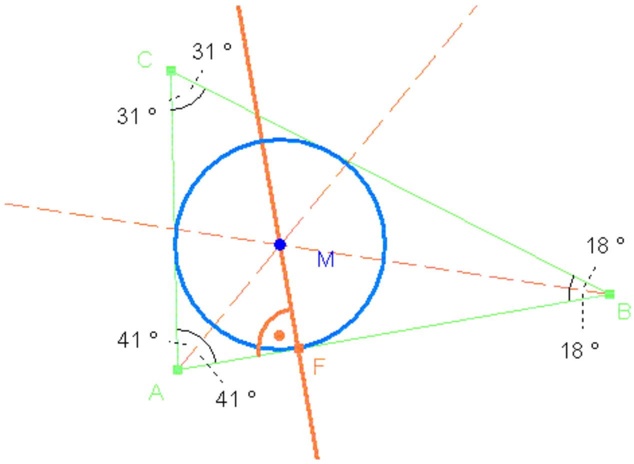
Satz vom Inkreis eines Dreiecks

Jedes Dreieck besitzt einen Inkreis; sein Mittelpunkt ist der gemeinsame Schnittpunkt M der drei **Winkelhalbierenden**.
Für seinen Radius r gilt: r= d(M; [AB]) *



- r= d(M; [AB]) in Worten: Der Radius ist der Abstand zwischen dem Schnittpunkt M der Winkelhalbierenden und der Seite a= [AB] selbstverständlich ist auch der Abstand zur Seite b oder c möglich, jedoch ist der Radius NICHT der Abstand von M zum Schnittpunkt der Winkelhalbierenden mit der entsprechenden Seite!

Finden lässt sich der Abstand zwischen dem Schnittpunkt M der Winkelhalbierenden und der Seite a= [AB] indem man vom Punkt ein Lot auf die Seite s konstruiert. Der Schnittpunkt zwischen a und dem Lot nennt man Lotfußpunkt. Der Abstand (und damit auch der Radius) ist die Länge der Strecke [FM]

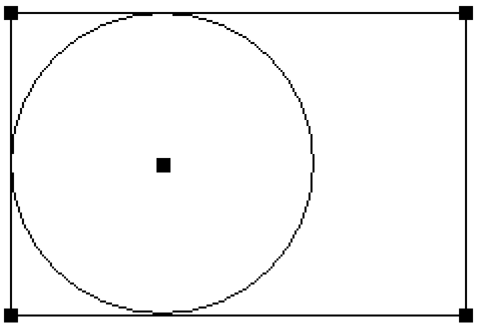


Aufgabe 3

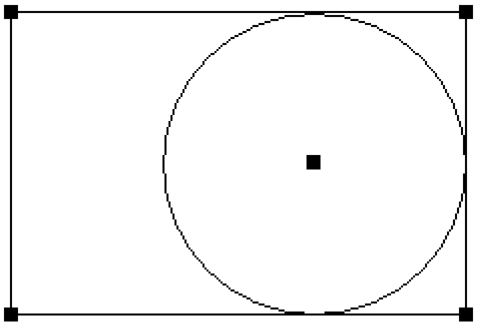
Gefragt war, ob es zu jedem Viereck einen Inkreis gibt.

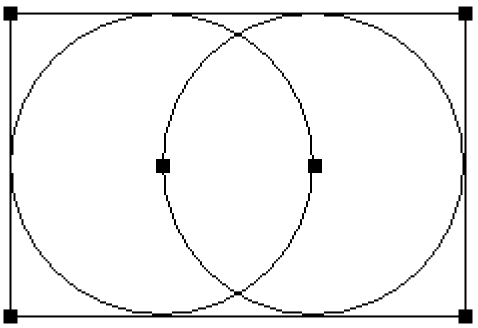
Ein einziges Gegenbeispiel ist somit eine ausreichende Begründung für die richtige Antwort nein zur Frage.

geeignet dafür ist beispielsweise das Rechteck. Ein Inkreis der alle vier Seiten berührt ist nicht möglich!



oder

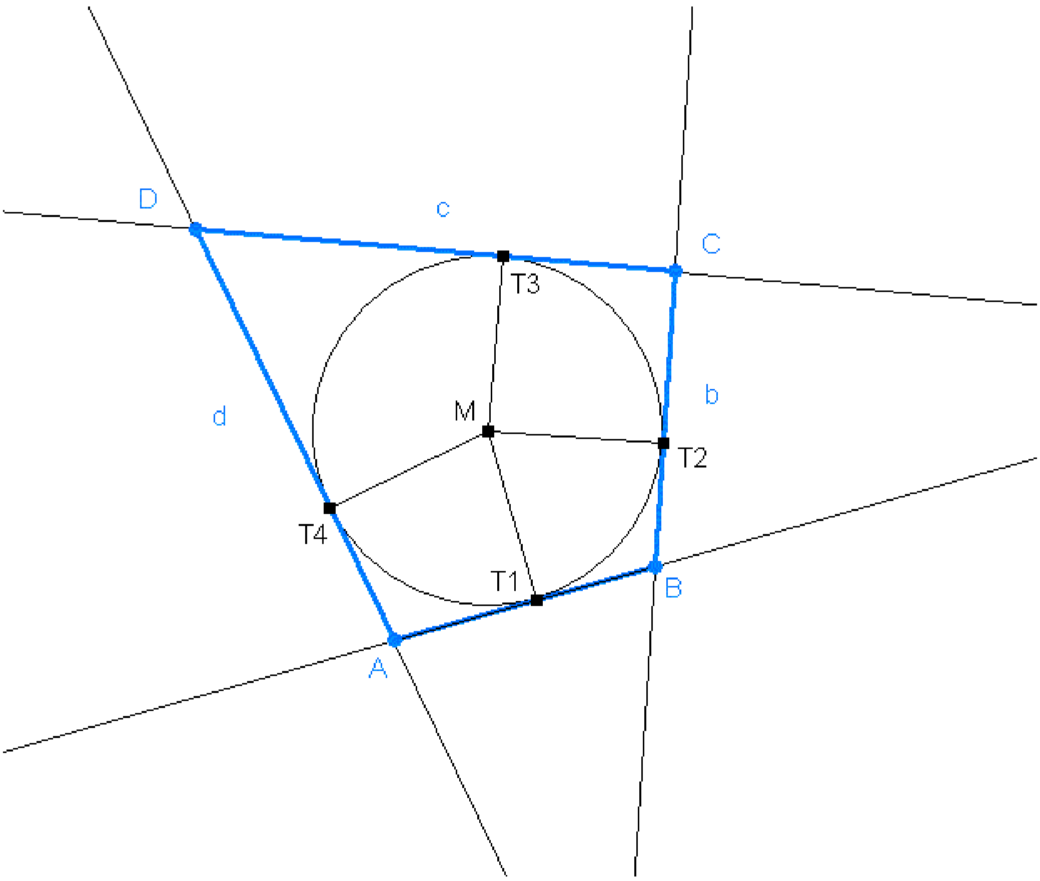




oder

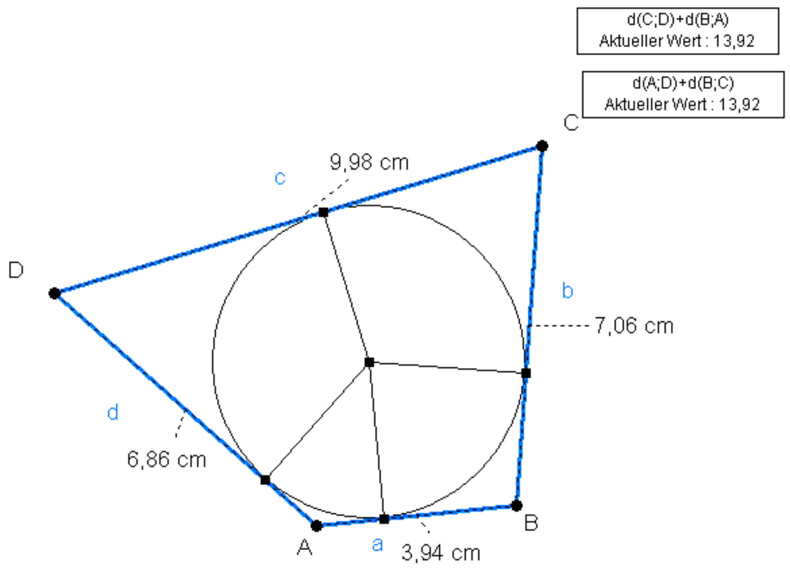
Aufgabe Nr. 4: Vorbereitung:

So sollte deine Zeichnung aussehen, wenn du alle Schritte der Vorbereitung durchgeführt hast:



Aufgabe 6a

Ein Viereck ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn die Summen der Längen je zweier Gegenseiten gleich groß sind.



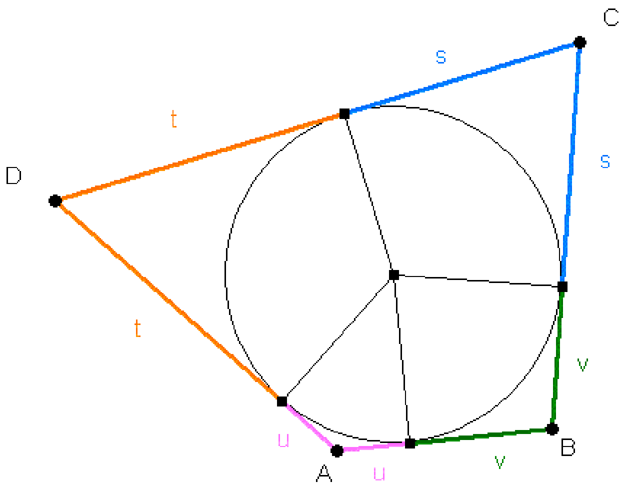
Aufgabe 6b

Beweis des Satzes:

Vor.: ABCD ist ein Tangentenviereck

Beh.: a + c = b + d

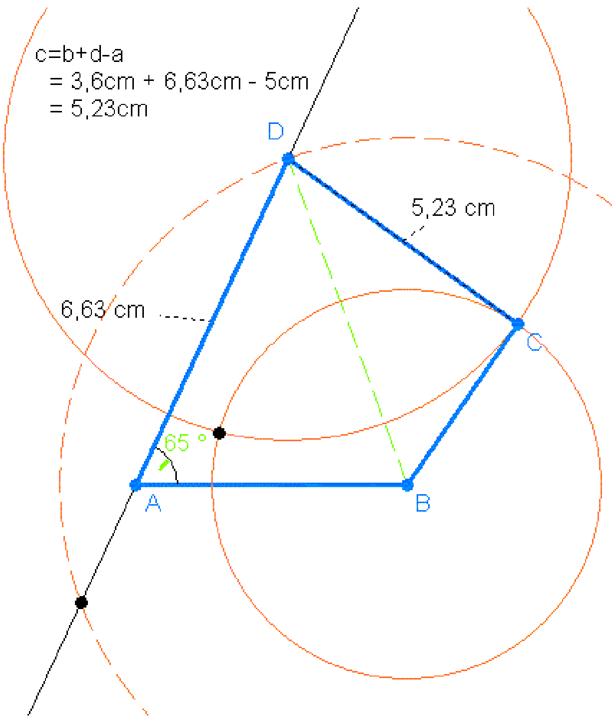
Bew.: a + c = (u+v) + (s+t) = (v+s) + (u+t) = b + d q.e.d.



Den Beweis vom Kehrsatz musst du alleine schaffen. Im Prinzip geht er mehr oder weniger rückwärts zum obigen Teil unter Verwendung unseres Wissens über Tangentenabschnitte.

Aufgabe 7a: Tangentenviereck

Beachte: Am Ende der Konstruktion kommen zwei Punkte C in Betracht. Nur einer bleibt übrig, wenn das Viereck ein Tangentenviereck sein soll. Warum?

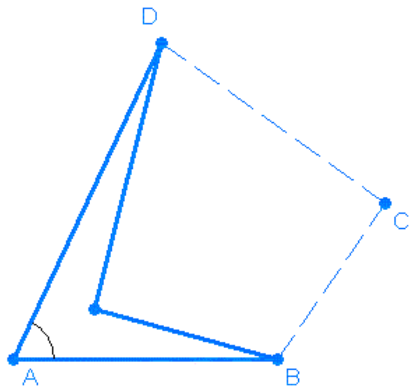


Konstruktion des Teildreiecks ABD
A ist ein freier Basispunkt
B ist ein freier Basispunkt
s1 ist eine Strecke der festen Länge 5 cm zwischen A und B
g1 ist eine Gerade durch A im Winkel der Weite 65° zur Geraden (B ; A)
k1 ist ein Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 6,4 cm
D ist der 2. Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
(beachte der andere Schnittpunkt kommt nicht in Betracht, da sonst der Winkel α 245° betragen würde.

Konstruktion des Punktes C
k2 ist ein Kreis mit Mittelpunkt B und Radius 3,6 cm
k3 ist ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius 5,23 cm
C ist ein Schnittpunkt der Kreise k3 und k2

Nur in einem konvexen Viereck kann es einen Inkreis geben!
Notiere dies in dein Heft!

Sie dir das konkave Viereck in der Zeichnung an. Wie willst du hier einen Inkreis einfügen?



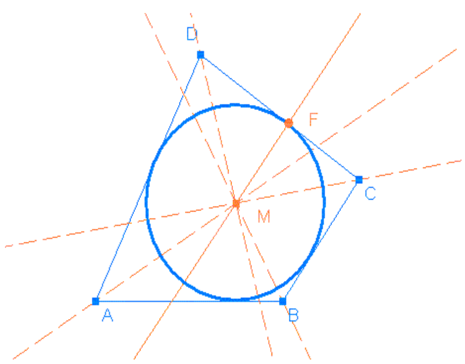
Aufgabe 7b:

Konstruktionsbeschreibung:

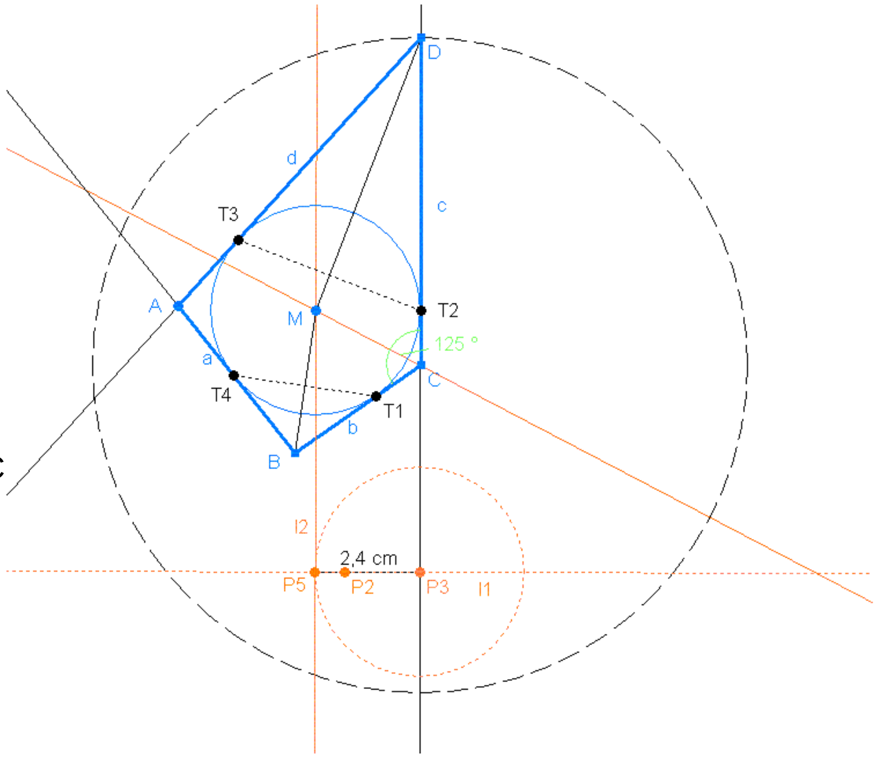
Konstruktion des Inkreismittelpunkts
g1 ist die Halbierende des Winkels (C ; D ; A)
g2 ist die Halbierende des Winkels (D ; A ; B)
g3 ist die Halbierende des Winkels (A ; B ; C)
g4 ist die Halbierende des Winkels (B ; C ; D)
M ist der GEMEINSAME Schnittpunkt der Winkelhalbierenden

Konstruktion des Inkreisradius
g5 ist das Lot von M auf [CD]
F ist der Schnittpunkt des Lots und [CD]
Der Inkreis ist ein Kreis um M durch F

Beachte: Alle 4 Winkelhalbierenden schneiden sich in einem Punkt!



Aufgabe 7c:



Konstruktionsbeschreibung:

1) die gegebenen Größen b, c und den WInkel γ einzeichnen:

- B ist ein freier Basispunkt
- C ist ein freier Basispunkt
- b ist eine Strecke der festen Länge 3,5 cm zwischen B und C
- g1 ist eine Gerade durch C im Winkel der Weite - 125° zur Geraden (B ; C)
- k1 ist ein Kreis mit Mittelpunkt C und Radius 7,5 cm
- D ist der 2. Schnittpunkt der Linie g1 mit dem Kreis k1
- c ist die Strecke [C ; D]

2) Konstruktion des Inkreismittelpunkts einzeichnen
(Idee: M liegt auf der Winkelhalbierenden von Gamma und hat zur Strecke c den Abstand r=2,4 cm)

- g2 ist die Halbierende des Winkels (D ; C ; B)

(Parallele zu c im Abstand r=2,4cm)

- P2 ist ein freier Basispunkt
- l1 ist das Lot von P2 auf g1
- P3 ist der Schnittpunkt der Linien g1 und l1
- k4 ist ein Kreis mit Mittelpunkt P3 und Radius 2,4 cm
- P5 ist der 2. Schnittpunkt der Linie l1 mit dem Kreis k4
- l2 ist das Lot von P5 auf l1
- M ist der Schnittpunkt der Linien g2 und l2

3) Konstruktion des Inkreises:

- k5 ist ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius 2,4 cm

4) Konstruktion der Berührpunkte auf c und d

- T2 ist der 2. Schnittpunkt der Linie c mit dem Kreis k5
- T1 ist der 2. Schnittpunkt der Linie b mit dem Kreis k5
- s3 ist die Strecke [B ; M]
- P11 ist Bildpunkt von T1 bei der Achsenspiegelung an s3

5) Konstruiere Berührpunkte auf a und b
(Idee: Die Berührpunkte sind jeweils symmetrisch zu MD bzw. zu MB (sind gleichzeitig auch die Winkelhalbierenden))

- s3 ist die Strecke [B ; M]
- T4 ist Bildpunkt von T1 bei der Achsenspiegelung an s3
- s5 ist die Strecke [M ; D]
- P9 ist Bildpunkt von T2 bei der Achsenspiegelung an s5

6) Konstruiere den fehlenden Punkt A
(Idee: Er ist der Schnittpunkt der fehlenden beiden Tangenten)

- h1 ist eine Halbgerade mit Startpunkt B durch den Punkt P11
- h2 ist eine Halbgerade mit Startpunkt D durch den Punkt P9
- A ist der Schnittpunkt der Linien h2 und h1

Nur in einem konvexen Viereck kann es einen Inkreis geben!
Notiere dies in dein Heft!

Sie dir das konkave Viereck in der Zeichnung an. Wie willst du hier einen Inkreis einfügen?