Größter gemeinsamer Teiler und kleinstes gemeinsames Vielfaches

1 Der größte gemeinsame Teiler (ggT)

Zu jeder Zahl kann man ihre **Teilermenge** angeben.

Beispiel: T30 = {**1**; **2**; **3**; 5; **6**; 10; 15; 30} T12 = {**1**; **2**; **3**; 4; **6**; 12}
Die gemeinsamen Teiler beider Zahlen lauten: 1, 2, 3 und 6
Der größte gemeinsame Teiler beider Zahlen: ggT(30; 12) = 6

Ermittlung des ggT mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung:

Beispiel: ggT (240; 300) =

240 = **2**· **2**· 2· 2· **3**·**5** — 1. Primfaktorenzerlegung
300 = **2**·**2**· · **3**·**5**·5

ggT (240; 300) = **2**·**2**· ·**3**·**5** = 60 — 2. Man bildet das Produkt aus den gemeinsamen Primfaktoren

Der ggT zweier oder mehrerer Zahlen ist das Produkt der gemeinsamen Primfaktoren.

2 Das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV)

Zu jeder Zahl kann man ihre **Vielfachenmenge** angeben.

Beispiel: ς8 = {8; 16; **24**;32; 40; **48**; 56; 64; **72**; ..} ς12 = {12; **24**; 36; **48**; 60; **72**; ..}
Die gemeinsamen Vielfachen beider Zahlen lauten: 24, 48, 72, ...

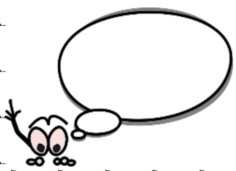
Ermittlung des kgV mit Hilfe der Primfaktorenzerlegung:

Beispiel: kgV(240; 300) =

240 = **2**· **2**· **2**· **2**· **3**·**5** — 1. Primfaktorenzerlegung
300 = 2·2· · 3·5·**5**

kgV(240; 300) = **2**· **2**· **2**· **2**· **3**·**5**·**5** = 1200 — 2. Man bildet das Produkt aller vorkommenden Primfaktoren

Das kgV ist das Produkt aller Primfaktoren der ersten Zahl und der Primfaktoren die in der zweiten Zahl noch zusätzlich vorkommen



Formveränderung von Brüchen

1 Kürzen

Wenn im Zähler und Nenner eines Bruches gemeinsame Faktoren enthalten sind, so kann man den Bruch kürzen.

Kürzen heißt Zähler und Nenner eines Bruches durch dieselbe Zahl dividieren.

Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$ $\frac{18}{20} = \frac{18:2}{20:2} = \frac{9}{10}$

Beachte: Man darf mit 0 nicht kürzen

2 Erweitern

Das Gegenteil vom Kürzen ist das Erweitern.
Hierbei werden Zähler und mit einem bestimmten Faktor multipliziert.

Erweitern heißt Zähler und Nenner eines Bruches mit derselben Zahl

Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$ (20) $\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$

Beachte: Man darf mit 0 nicht erweitern

3 Addition von Brüchen

Zwei Brüche werden addiert (zusammengezählt), indem man sie zunächst auf einen gemeinsamen Nenner (den Hauptnenner) bringt
Dieses erreicht man, indem man die Brüche jeweils mit geeigneten Faktoren erweitert.

Regel: Man bestimmt den Hauptnenner und mach die Brüche gleichnamig.
Man addiert die Zähler.
Man behält den gemeinsamen Nenner bei.

Beispiel: $\frac{3}{4} + \frac{5}{3} = \frac{9}{12} + \frac{20}{12} = \frac{29}{12} = 2\frac{5}{12}$

4 Subtraktion von Brüchen

Beim Subtrahieren (Abziehen) eines Bruches von einem anderen geht man prinzipiell genauso vor:
Wenn die Nenner der Brüche gemeinsame Faktoren enthalten, so braucht man nur mit den anderen Faktoren der Nenner zu erweitern. Man muss hierbei das kleinste gemeinsame Vielfach der Nenner bestimmen. Diese ist der Hauptnenner.

Regel:	Man bestimmt den Hauptnenner und mach die Brüche gleichnamig. Man subtrahiert die Zähler. Man behält den gemeinsamen Nenner bei.
Beispiel:	$\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=\frac{7}{12}$

5 Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden miteinander multipliziert (mal genommen), indem man jeweils die Werte im Zähler und die Werte im Nenner miteinander multipliziert.

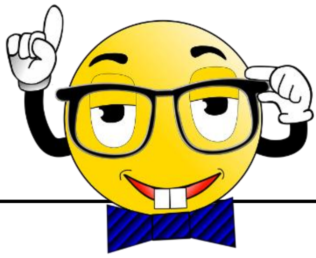
Regel:	**Bruch mal Bruch** Man multipliziert Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner. Gemischte Zahlen werden vorher in unechte Brüche umgewandelt.	
Beispiel:	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	$\frac{3}{8}\cdot\frac{4}{21}=\frac{3\cdot 4}{8\cdot 21}=\frac{1\cdot 1}{2\cdot 7}=\frac{1}{14}$
	Bruch mal ganze Zahl Man verwandelt die ganze Zahl in einen Bruch mit dem Nenner 1 und verfährt nach obiger Regel.	
Beispiel:	$\frac{a}{b}\cdot c=\frac{a\cdot c}{b\cdot 1}=\frac{a\cdot c}{b}$	$\frac{4}{3}\cdot 12=\frac{4\cdot 12}{3\cdot 1}=\frac{36}{3}=12$

6 Division von Brüchen

Ein Bruch wird durch einen anderen Bruch dividiert (geteilt), indem man ihn mit Dem Kehrwert des anderen Bruches multipliziert (mal nimmt).
Es wird bei der Darstellung zusätzlich verdeutlicht, dass man das Teilen durch Einen Bruch auch wieder mittels eines Bruchstriches darstellen kann.

Regel: Man bildet den Kehrwert des zweiten Bruches und multipliziert anschließend die beiden Brüche.

Beispiel: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $\quad$ $\frac{4}{9} : \frac{5}{3} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$



7. Regel für Bruchrechnungen

Regel:

Terme
Inhalte von Klammern ausrechnen
Punkt vor Strich
Rechenrichtung von links nach rechts

Bruchterme
Das Ergebnis eines Bruchterms erhältst du, indem du zuerst den Zähler, dann den Nenner berechnest.

Doppelbrüche
Der Zähler des Doppelbruchs wird mit dem Nennerkehrwert Multipliziert.

Beispiel: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$

Dezimalbrüche

1 Addieren und subtrahieren von Dezimalbrüche

Man setzt Komma unter Komma und addiert (subtrahiert) stellenweise.

Beispiel:

```
  27,11          2,91
+  8,167      -  2,845
  35,277         0,065
```

2 Multiplizieren von Dezimalbrüche

Man multipliziert zunächst so, als stände bei den Faktoren kein Komma.
Dann gibt man dem Ergebnis so viele Nachkommastellen, wie die Faktoren **zusammen** haben.

Beispiel:

```
2,91 · 4,5
1164
 1455
13095 = 13,095
```

3 Dividieren von Dezimalbrüche

Man verschiebt zunächst bei beiden Zahlen das Komma um die gleiche Anzahl von Stellen nach rechts, bis durch eine natürliche Zahl dividiert werden kann.
Wenn man beim Dividieren links von den Einern zu den Zehnteln übergeht, setzt man rechts ein Komma.

Beispiel:

```
21,838 : 7,16 =  2183,8 : 716 = 3,05
                 2148
                   3580
                   3580
                      0
```

Die wichtigsten Regeln zum Bruchrechnen 6

Nun solltest du dich auskennen

1. Das Dividieren ist die ____________________ vom Multiplizieren.

2. Doppelpunkt und Bruchstrich sind _________________________ Rechenzeichen

3. Der Teilungszahl (Zähler) heißt _______________, der Teiler
   (Nenner) _______________. Beide zusammen bilden einen ____________.
   Das Ergebnis heißt __________________.
   Jeder Bruch ist ein __________ , und jeder __________ ist ein Bruch.

____________ $\frac{a}{b}$ a : b = c

____

______ __________

______

4. Ist a ein Vielfaches von b, so bedeutet der Term --- eine ganze Zahl.

5. Ist a kein Vielfaches von b, so entsteht eine __________ .
   Eine ___________ Ist ein Quotient ganzer Zahlen.

6. Ganze Zahlen und Bruchzahlen haben den gemeinsamen Namen _________ .

7. Vertauscht man Zähler und Nenner, so entsteht der __________________ der Bruchzahl.

8. Der ____________ einer Bruchzahl hat einen anderen Wert als die Bruchzahl.

Die wichtigsten Regeln zum Bruchrechnen

7

Multiplikation von Brüchen:

Division von Brüchen:

Division eines Bruches mit einer natürlichen Zahl:

Addition und Subtraktion:

Bestimmung des Hauptnenners:

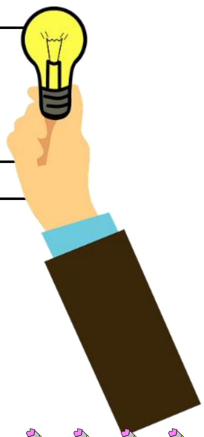
Addition eines Bruches mit einer ganzen Zahl:

Rechengesetze bei der Multiplikation und Addition von Brüchen:

Regeln für Terme:

Bruchterme

Doppelbrüche



Die wichtigsten Regeln zum Bruchrechnen

Lösungen

1. Das Dividieren ist die __Umkehrung_____ vom Multiplizieren.

2. Doppelpunkt und Bruchstrich sind _gleichbedeutende____ Rechenzeichen

3. Der Teilungszahl (Zähler) heißt _Dividend___, der Teiler (Nenner) _Divisor_____. Beide zusammen bilden einen _Quotienten__.
   Das Ergebnis heißt _Quotientwert_____.
   Jeder Bruch ist ein _Quotient__ , und jeder _Quotient _ ist ein Bruch.

Dividend	$\frac{a}{b}$	a : b =	c
_Divisor___			
		Quotient (Bruch)	Quotientwert

4. Ist a ein Vielfaches von b, so bedeutet der Term $\frac{a}{b}$ eine ganze Zahl.

5. Ist a kein Vielfaches von b, so entsteht eine Bruchzahl .
   Eine _Bruchzahl _ Ist ein Quotient ganzer Zahlen.

6. Ganze Zahlen und Bruchzahlen haben den gemeinsamen Namen rationale Zahl .

7. Vertauscht man Zähler und Nenner, so entsteht der __Kehrwert__ der Bruchzahl.

8. Der _Kehrwert_ einer Bruchzahl hat einen anderen Wert als die Bruchzahl.

Die wichtigsten Regeln zum Bruchrechnen

Multiplikation von Brüchen:
Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

Division von Brüchen:
Die natürliche Zahl wird mit dem Zähler multipliziert. Der Nenner wir beibehalten.

Division eines Bruches mit einer natürlichen Zahl:
Der Nenner wird mit der natürlichen Zahl multipliziert und der Zähler beibehalten._

Addition und Subtraktion:
Brüche gleichnamig machen
Zähler addieren oder subtrahieren
Nenner beibehalten

Bestimmung des Hauptnenners:
Die einzelnen Nenner werden als Produkt von Primzahlen geschrieben. Der Hauptnenner setzt sich aus den höchsten Potenzen aller vorkommenden Primfaktoren zusammen.

Addition eines Bruches mit einer ganzen Zahl:
1._Die Summe einer natürlichen Zahl mit einem Bruch kann als gemischter Bruch geschrieben werden.
2. Eine natürliche Zahl wird als gleichnamiger Bruch erweitert. Anschließend Werden die Zähler addiert.

Rechengesetze bei der Multiplikation und Addition von Brüchen:
Vertauschungsgesetzt: Kommutativgesetz, KG
Die Faktoren (Summanden) dürfen getauscht werden.
Verbindungsgesetz: Assoziativgesetz, AG
Die Klammern dürfen vertauscht werden

Regeln für Terme:
Inhalte von Klammern ausrechnen

Punkt vor Strich
Rechenrichtung von links nach rechts

Bruchterme
Das Ergebnis eines Bruchterms erhältst du, indem du zuerst den Zähler, dann den Nenner berechnest.

Doppelbrüche
Der Zähler des Doppelbruchs wird mit dem Nennerkehrwert multipliziert.