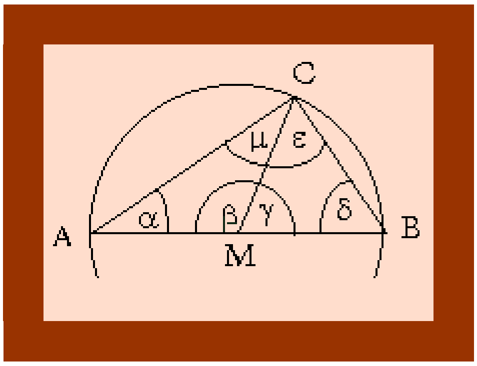
# Satz des Thales 1

**Wenn bei einem Dreieck ABC die Ecke C auf dem Kreis mit dem Durchmesser AB liegt, dann hat das Dreieck bei C einen rechten Winkel.**

Der Satz des Thales von Milet (um 625 v.Chr — um 547 v. Chr.) besagt, dass Dreiecke, deren längste Seite der Durchmesser eines Kreises ist, genau dann rechtwinklig sind, wenn der dritte Punkt auf dem Bogen des Kreises liegt (siehe Zeichnung).




Um den Satz zu beweisen, denkt man sich vom Mittelpunkt des Kreises, also vom Mittelpunkt M der längsten Seite des Dreiecks, eine Strecke zum dritten Punkt C. Dadurch entstehen zwei Teildreiecke AMC und MBC.

Die drei Strecken AM, BM und CM sind jeweils Radien des Kreises und damit alle gleichlang.

Da beide Teildreiecke (AMC und MBC) jeweils zwei dieser Radien als Seiten haben, müssen beide gleichschenklig sein. Gleichschenklige Dreiecke besitzen zwischen den gleichen Schenkeln und der dritten Strecke je zwei gleiche Winkel. In der Zeichnung gilt also: a = m und d = e.

Nun gilt in jedem Dreieck der Satz, dass die Summe der Innenwinkel 180° beträgt; so auch im Dreieck ABC. Die Innenwinkel dieses Dreiecks sind a, d, sowie e und m. Daher muss gelten:

$$a + d + e + m = 180°$$

Da a = m und d = e , kann man auch schreiben:

$$m + e + e + m = 180°$$

**Zusammengefasst:**

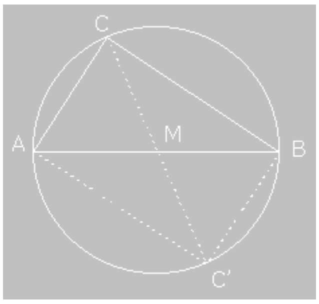
$$2m + 2e = 180°$$

Beide Seiten der Gleichung durch 2 geteilt: $m + e = 90°$

Und damit ist bewiesen, dass der Innenwinkel des Dreiecks ABC beim Punkt C 90° betragen muss.

***Beweis des Satzes von Thales über die Punktsymmetrie des Kreises***

Das Dreieck ABC ist so in einen Kreis einbeschrieben, dass die Strecke AB durch den Kreismittelpunkt M geht.



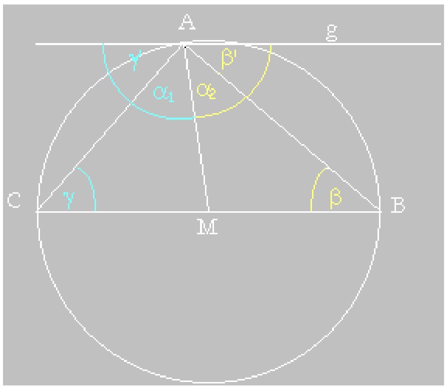

Spiegle den Punkt C am Mittelpunkt M.

Es gilt |MA| = |MC'| = |MB| = |MC|, denn alle diese Strecken sind Kreisradien.

Damit sind die Diagonalen AB und CC' des Vierecks AC'BC gleichlang.

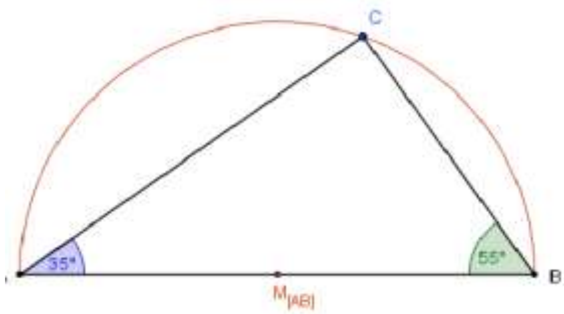
Ein Viereck mit gleichlangen Diagonalen ist ein Rechteck, woraus folgt, dass alle Innenwinkel des Vierecks, insbesondere ÐACB rechte Winkel sind.

***Weiterer Beweis***




g || CB
a := a1 + a2
Es gilt:
g ¢ + a1 + a2 + b¢ = 180° (Winkelsumme ACB)
b = b¢ und g = g ¢ (Wechselwinkel),
damit ist auch
g + a1 + a2 + b = 180°
Die Dreiecke ABM und AMC sind gleichschenklig,
daher gilt b = a2 und g = a1 und somit a1 + a1 + a2 + a2 = 180°.
Wegen a1 + a2 = a, ist 180° = a1 + a1 + a2 + a2 = 2a und damit a=90°.

**1.** Welche der folgenden Aussagen über die Winkel des Dreieckes ABC sind wahr?



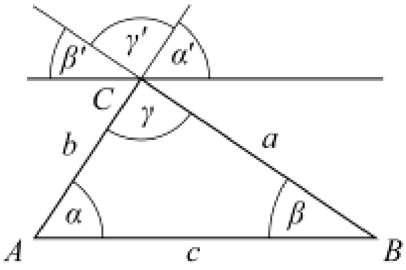

a) ☐ α + β ergibt immer 60°
b) ☐ Ist α = 45°, so gilt α = β
c) ☐ Die Summe α + β ist immer gleich
d) ☐ α + β sind nie maßgleich
e) ☐ α ist immer kleiner als 90°
f) ☐ β kann nie doppelt so groß wie α sein
g) ☐ Der Winkel ACB misst immer 90°
h) ☐ α + β ergibt das Maß von Winkel ACB

# Satz des Thales 3

1. Notiere den Satz des Thales in Worten und erkläre anhand einer Skizze, wieso er stimmt.

______________________________________________

2. Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°.
   Ergänze den Lückentext.




Im Dreieck ABC wird einen ___________ zu c durch C gezeichnet. Die Seiten a und b werden über C hinaus verlängert.
α', β' und γ' bilden zusammen einen ______________ Winkel. Er ist _______ groß.
γ' ist der ________________ von γ und daher so groß wie γ.
α' ist ein ________________ von α und ist daher so groß wie α.
β' ist ein ________________ von β und daher so groß wie β.
Daher sind also α' + β' + γ' = α + β + γ = ________

3. Was kann über den Winkel γ gesagt werden, wenn der Punkt C eines Dreiecks ABC außerhalb des Thaleskreises von AB liegt? (ohne Beweis!)

______________________________________________

4. Wofür kann der Thaleskreis im Alltag benutzt werden?
   Gib ein typisches Anwendungsbeispiel.

______________________________________________

5. Zeichne einen Halbkreis mit r = 3 cm. Konstruiere verschiedene rechtwinklige Dreiecke $ABC_1$, $ABC_2$, ....

6. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus den folgenden Angaben: c = 7cm, hc = 3cm. Fertige eine kurze Konstruktionsbeschreibung an.

7. Formuliere eine Aufgabe (z.B. eine Dreieckkonstruktion), bei der der Satz des Thales nicht verwendet werden kann!

______________________________________________

______________________________________________

1. Welche Fehler können beim Zeichnen von Dreiecken mit dem Thaleskreis auftreten?

______________________________________________________________________________

______________________________________________________________________________

2. Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist:

   a) c = 5 cm; a = 3 cm

   b) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 6 cm; b = 5 cm

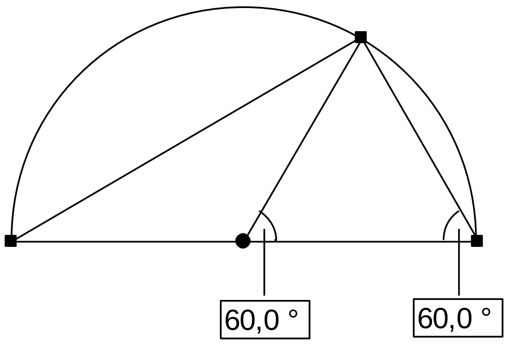
   c) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 4,8 cm; a = 3,2 cm

   d) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 5,2 cm; b = 3,6 cm

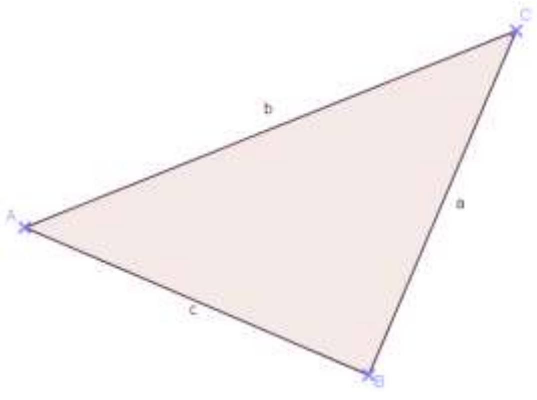
3. Zeichne einen Kreis mit r = 4 cm. Zeichne in diesen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck. Dabei ist $\overline{AB}$ = 8 cm.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\overline{AC} = 6$ cm | b) $\overline{AC} = 5{,}3$ cm | c) $\overline{AC} = 44$ mm |
| d) $\overline{BC} = 4{,}1$ cm | e) $\overline{BC} = 2{,}6$ cm | f) $\overline{BC} = 53$ mm |

4. Bezeichne die unbekannten Winkel und bestimme ihre Größe.




5. Gegeben ist das nebenstehende Dreieck ABC.
   a) Konstruiere auf diesem Blatt den Umkreis des Dreiecks und beschreibe die Konstruktion kurz aber vollständig.
   b) Um was für ein Dreieck handelt es sich?

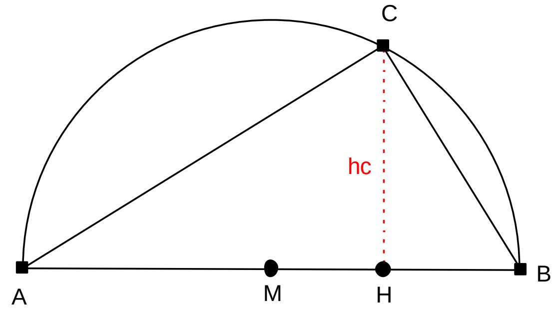


1. Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Satz des Thales, wenn gegeben ist:

   a) c = 4,5 cm; a = 4 cm
   b) c = 6 cm; b = 4,1 cm

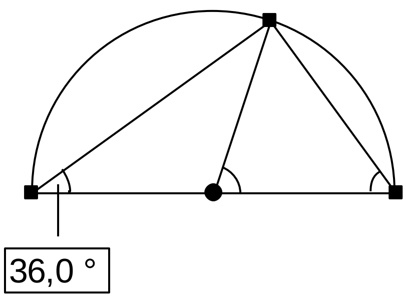
2. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thaleskreises, wenn gegeben ist:

   a) c = 6,2 cm; $h_c$ = 2,4 cm
   b) c = 5,8 cm; $h_c$ = 2 cm
   c) c = 5,4 cm; $h_c$ = 2,3 cm
   d) c = 6 cm; $h_c$ = 2,1 cm

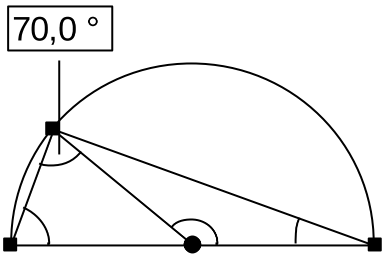



3. Bezeichne die unbekannten Winkel und gib ihre Größe an.

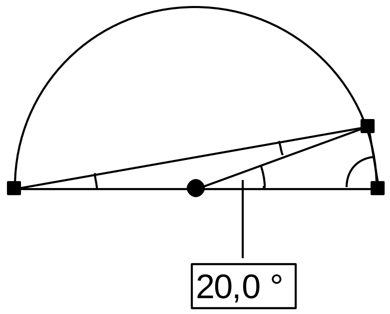
a)



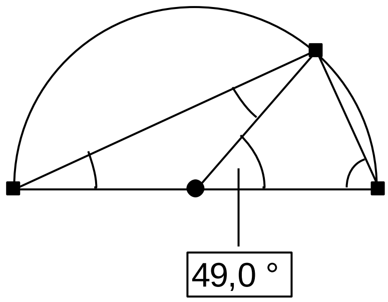

b)




c)



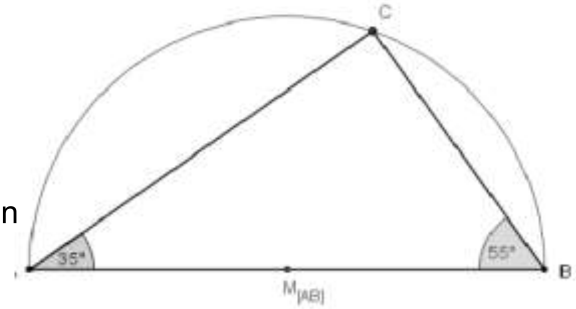

d)



## Der Satz des Thales Lösungen 2

1. Welche der folgenden Aussagen über die Winkel des Dreieckes ABC sind wahr?

a) ☐ α + β ergibt immer 60°
b) ☒ Ist α = 45°, so gilt α = β
c) ☒ Die Summe α + β ist immer gleich
d) ☐ α + β sind nie maßgleich
e) ☒ α ist immer kleiner als 90°
f) ☐ β kann nie doppelt so groß wie α sein
g) ☒ Der Winkel ACB misst immer 90°
h) ☒ α + β ergibt das Maß von Winkel ACB

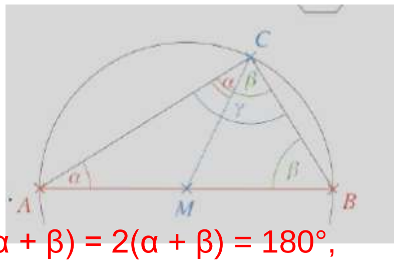



## Der Satz des Thales Lösungen 3

1. Notiere den Satz des Thales in Worten und erkläre anhand einer Skizze, wieso er stimmt.

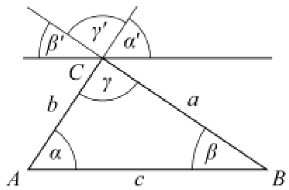
Liegt ein Punkt C auf einem Kreis mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, dann ist das Dreieck ABC **rechtwinklig** in C.

Die Punkte A, B und C liegen alle auf dem Kreis um M mit dem Durchmesser $\overline{AB}$, daher sind die Strecken $\overline{MA}$, $\overline{MB}$, und $\overline{MC}$, gleich lang. Also sind die Dreiecke AMC und CMB gleichschenklig und ihre Basiswinkel gleich groß. Der Winkel γ setzt sich also zusammen aus α+β. Da im Dreieck die Innenwinkel zusammen 180° ergeben, gilt α + β + γ = α + β + (α + β) = 2(α + β) = 180°, also ist γ = 90°.



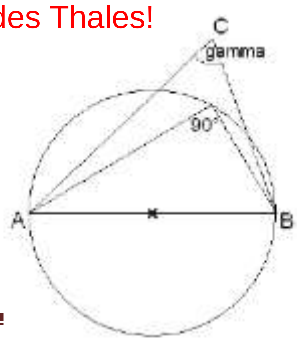

2. Die Innenwinkelsumme im Dreieck beträgt immer 180°.
Ergänze den Lückentext.

Im Dreieck ABC wird einen Parallele zu c durch C gezeichnet. Die Seiten a und b werden über C hinaus verlängert.
α‘, β‘ und γ‘ bilden zusammen einen gestreckten Winkel. Er ist 180° groß.
γ‘ ist der Scheitelwinkel von γ und daher so groß wie γ.
α‘ ist ein Stufenwinkel von α und ist daher so groß wie α.
β‘ ist ein Stufenwinkel von β und daher so groß wie β.
Daher sind also α‘ + β‘ + γ‘ = α + β + γ = 180°



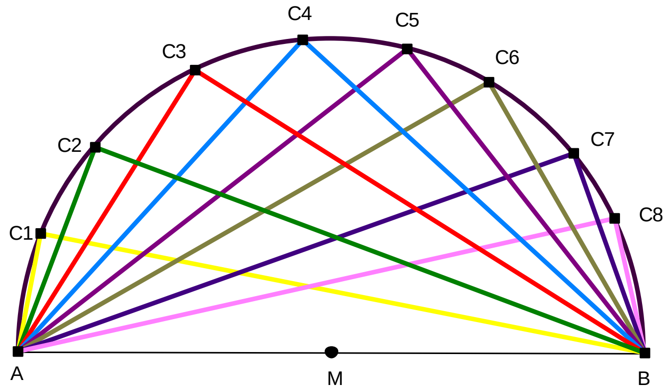

3. Was kann über den Winkel γ gesagt werden, wenn der Punkt C eines Dreiecks ABC außerhalb des Thaleskreises von AB liegt? (ohne Beweis!)

Dann ist der Winkel γ kleiner als 90° → Umkehrung des Satz des Thales!
Skizze:

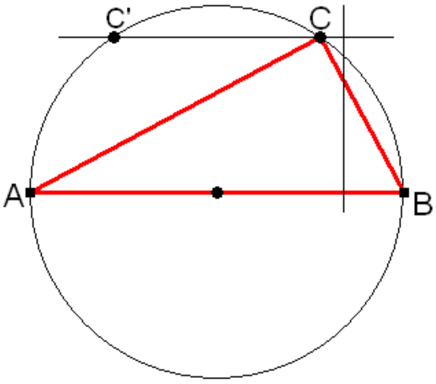


4. Wofür kann der Thaleskreis im Alltag benutzt werden?
   Gib ein typisches Anwendungsbeispiel.
   Typische Anwendungsaufgaben beschäftigen sich z.B. mit Blickwinkeln im Theater, Kino, Museum…

5. Zeichne einen Halbkreis mit r = 3 cm. Konstruiere verschiedene rechtwinklige Dreiecke $ABC_1$, $ABC_2$, ....




6. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus den folgenden Angaben: c = 7cm, $h_c$ = 3cm. Fertige eine kurze Konstruktionsbeschreibung an.
   -Zeichnen der Strecke AB mit 7 cm
   -Zeichnen des Thaleskreises über AB
   -Parallele zu AB mit 3 cm Abstand
   -Schnittpunkt Kreis-Parallele ist C
   (zwei Lösungen C und C` möglich!)
   -Zeichnen des Dreiecks ABC.




7. Formuliere eine Aufgabe (z.B. eine Dreieckkonstruktion), bei der der Satz des Thales nicht verwendet werden kann!
   Konstruiere ein Dreieck ABC mit AB = 5 cm und γ = 100°.
   Da unter diesen Bedingungen kein Innenwinkel des Dreiecks 90° betragen kann (Winkelsumme im Dreieck!), kann man den Satz des Thales bei dieser Konstruktion nicht anwenden.

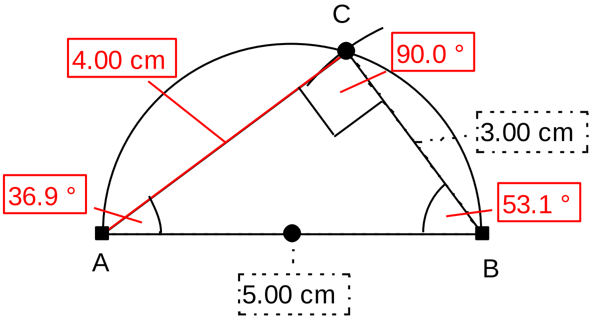
## Der Satz des Thales Lösungen 4

1. Welche Fehler können beim Zeichnen von Dreiecken mit dem Thaleskreis auftreten?
   Mögliche Fehlerquellen:
   - notwendige Voraussetzungen für den Satz des Thales sind nicht erfüllt
   - ungenaues Zeichnen
   - falsche Bezeichnung der Punkte und Strecken

2. Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist:

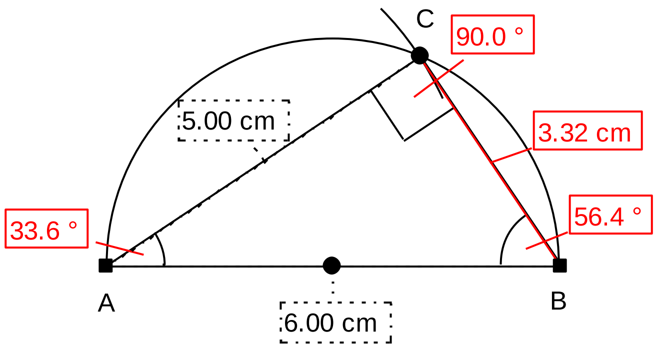
a) c = 5 cm; a = 3 cm

Konstruktionsbeschreibung:

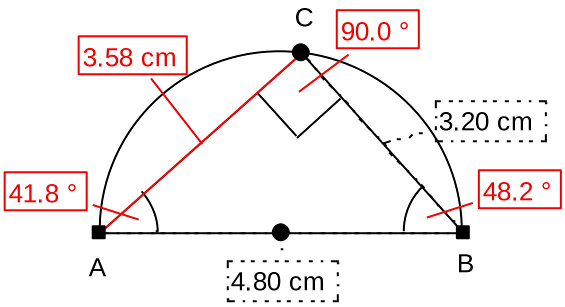



1. Zeichnen von c = 5 cm mit A und B
2. Bestimmung des Mittelpunktes von c
3. Zeichnen eines Halbkreises durch A und B
4. Kreisbogen um B mit r = 3 cm – Schnittpunkt mit dem Thaleskreis ist Punkt C

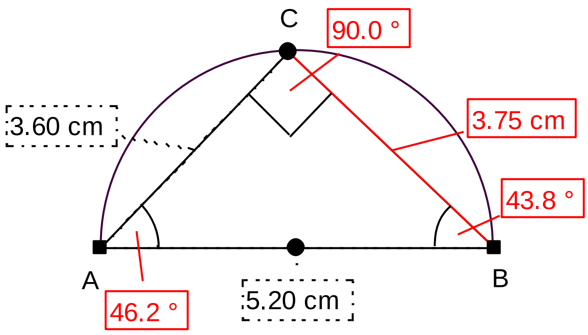
b) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 6 cm; b = 5 cm




c) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 4,8 cm; a = 3,2 cm

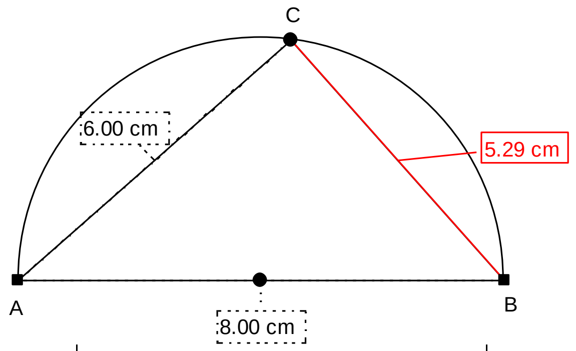



d) Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist: c = 5,2 cm; b = 3,6 cm



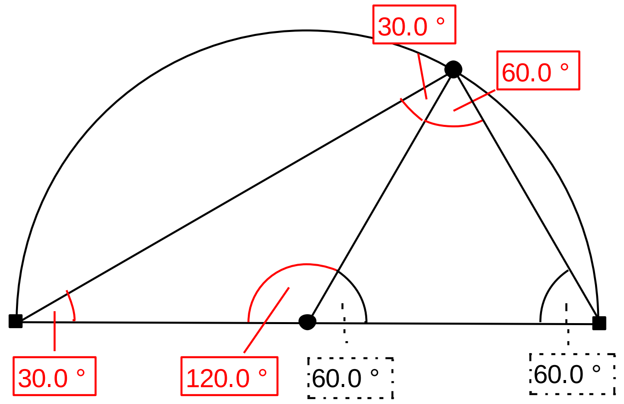
3. Zeichne einen Kreis mit r = 4 cm. Zeichne in diesen Kreis ein rechtwinkliges Dreieck. Dabei ist $\overline{AB}$ = 8 cm.

| | | |
|---|---|---|
| a) $\overline{AC} = 6$ cm | b) $\overline{AC} = 5{,}3$ cm | c) $\overline{AC} = 44$ mm |
| d) $\overline{BC} = 4{,}1$ cm | e) $\overline{BC} = 2{,}6$ cm | f) $\overline{BC} = 53$ mm |

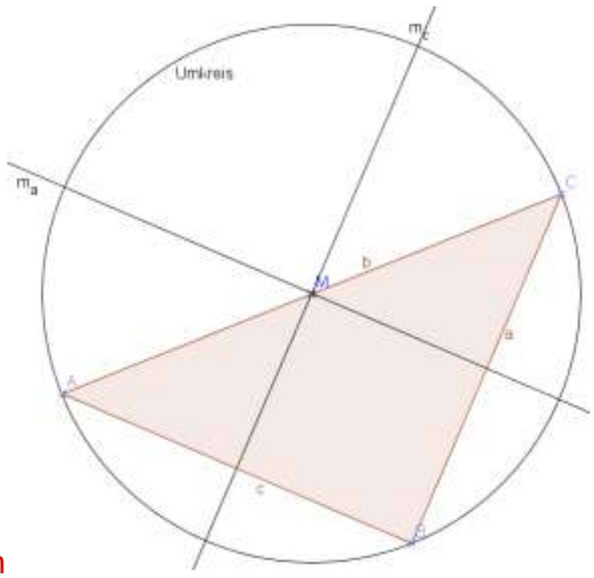



| | | |
|---|---|---|
| a) BC = 5,29 cm | b) BC = 6 cm | c) BC = 6,7 cm |
| d) AC = 6,7 cm | e) AC = 7,6 cm | f) AC = 6 cm |

4. Bezeichne die unbekannten Winkel und bestimme ihre Größe.

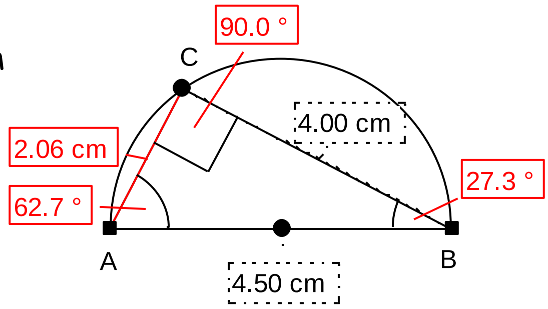



5. Gegeben ist das nebenstehende Dreieck ABC.
   a) Konstruiere auf diesem Blatt den Umkreis des Dreiecks und beschreibe die Konstruktion kurz aber vollständig.
   Beschreibung:
   Mittelsenkrechte $m_c$ auf c,
   Mittelsenkrechte $m_a$ auf a,
   M ist Schnittpunkt von $m_a$ und $m_c$
   M ist Mittelpunkt des gesuchten Umkreises
   b) Um was für ein Dreieck handelt es sich?
   Es handelt sich um ein rechtwinkliges Dreieck, da der Mittelpunkt des Kreises die längste Seite des Dreiecks halbiert und alle Eckpunkte des Dreiecks auf dem Kreis liegen (Umkehrung des Satz des Thales).

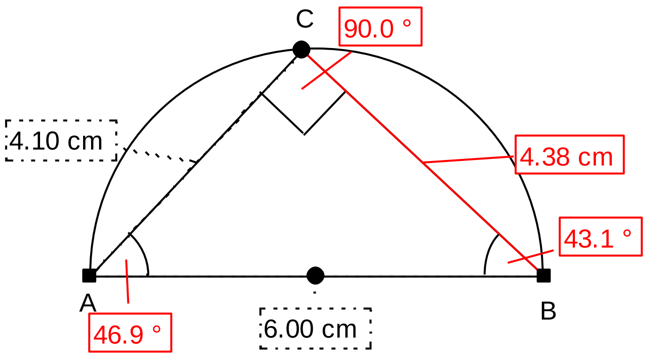


1. Zeichne jeweils ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thalessatzes, wenn gegeben ist:

a) c = 4,5 cm; a = 4 cm



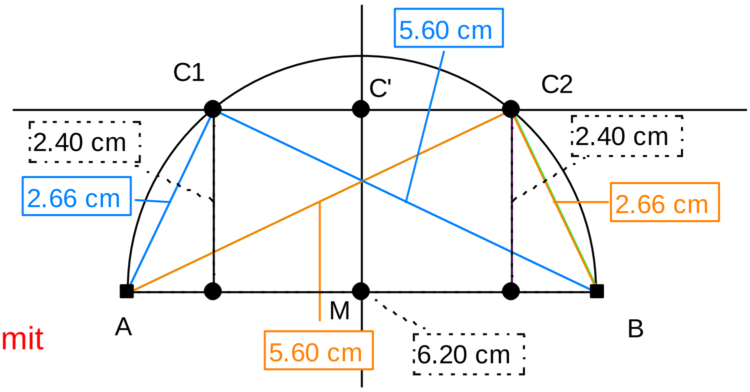

b) c = 6 cm; b = 4,1 cm




2. Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit Hilfe des Thaleskreises, wenn gegeben ist:

a) c = 6,2 cm; $h_c$ = 2,4 cm
b) c = 5,8 cm; $h_c$ = 2 cm
c) c = 5,4 cm; $h_c$ = 2,3 cm
d) c = 6 cm; $h_c$ = 2,1 cm

a) Gegeben: c = 6,2 cm; $h_c$ = 2,4 cm
Konstruktionsbeschreibung:
Zeichnen von C, Bestimmen von M
1. Errichten der Höhe in M mit C‘
2. Parallele zu AB durch C‘
3. Schnittpunkt des Thales-Kreises mit der Parallele ergibt $C_1$ und $C_2$



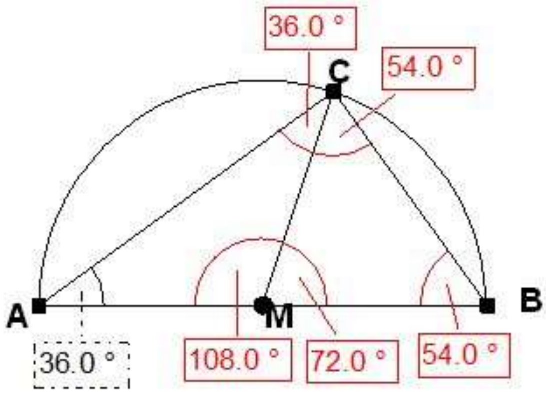

b) Gegeben: c = 5,8 cm; $h_c$ = 2 cm
a = 2,2 cm; b = 5,4 cm; p = 0,8 cm; q = 5 cm, $\alpha$ = 21,8°, ß = 68,2°

c) Gegeben: c = 5,4 cm; $h_c$ = 2,3 cm
a = 2,6 cm; b = 4,7 cm; p = 1,3 cm; q = 4,1 cm, $\alpha$ = 29,2°, ß = 60,8°

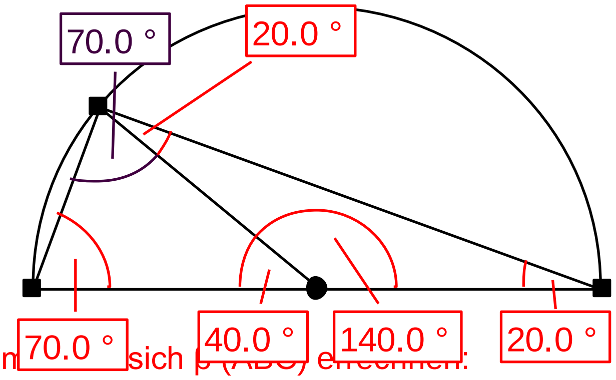
d) Gegeben: c = 6 cm; $h_c$ = 2,1 cm
a = 2,3 cm; b = 5,6 cm; p = 0,9 cm; q = 5,1 cm, $\alpha$ = 22,2°, ß = 67,8°

3. Bezeichne die unbekannten Winkel und gib ihre Größe an.

a)




b)



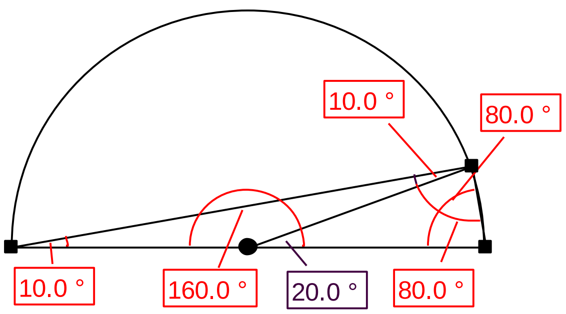

a)
Du ) = 90°, dan sich errechnen:
β = 90° - 36° = 54°

Das Dreieck AMC ist gleichschenklig, da A und C auf dem Thales-Kreis liegen und so von M gleich weit entfernt sind.
Deshalb gilt, dass der Winkel ACM = Winkel CAM, also 36°.
Der Winkel AMC kann damit berechnet werden: Winkel AMC = 180° - 2 · 36° = 108°

Das Dreieck MBC ist ebenfalls gleichschenklig, da B und C auf dem Kreis um M liegen und damit von M gleich weit entfernt sind.
Deshalb gilt, dass der Winkel MBC = Winkel BCM, also 54°.
Der Winkel BMC kann damit berechnet werden: 180° - 2 · 54° = 72°.

b) – d) entsprechend berechnen.

c)




d)