

Primzahlen

Als Primzahlen bezeichnet man Zahlen, die **genau zwei Teiler** besitzen.

Es gilt:

Ist eine Zahl z Primzahl, so sind ihre beiden Teiler 1 und z .

Nicht jede Zahl, die die Teiler 1 und z besitzt, ist eine Primzahl - denn nach der obigen Definition ist 1 keine Primzahl!

Liste aller Primzahlen bis 1000

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113
127	131	137	139	149	151
157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251
257	263	269	271	277	281
283	293	307	311	313	317
331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463
467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557
563	569	571	577	587	593
599	601	607	613	617	619
631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743
751	757	761	769	773	787
797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863
877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953
967	971	977	983	991	997

- 26 =
- 48 =
- 140 =
- 198 =
- 216 =
- 446 =
- 476 =
- 514 =
- 820 =
- 1820 =
- 2480 =
- 78624 =
- 207025 =

Markus behauptet: „Eine Zahl, die sich aus lauter gleichen Zahlen zusammensetzt, die größer als 1 sind, kann keine Primzahl sein.“
Hat er Recht? Begründe deine Ansicht!

2. a. Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl 1980

.....

b. Die Primfaktorzerlegung einer Zahl z ist $2 \cdot 33 \cdot 52 \cdot 11$

.....

Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die 11 mal so groß ist wie die Zahl z ?

Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die der 10. Teil der Zahl z ist?

Wieso ist 14 kein Teiler der Zahl z ?

.....

1. Ist 51 eine Primzahl? Begründe!

.....

2. Gib folgende Zahlen an:

- a) Gerade Primzahl
- b) Nachfolger der kleinsten zweistelligen Quadratzahl.
- c) Vorgänger der größten zweistelligen Quadratzahl.
- d) Die Zahl ist die Summe aus der größten einstelligen und der kleinsten zweistelligen Primzahl.

3. Überprüfe, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind, und begründe, falls sie es nicht sind.

- a) 93
- b) 155

4. Gib alle Primzahlen an, die größer als 20, aber kleiner als 60 sind.

.....

5. Zerlege die Zahl 84 vollständig in Primfaktoren.

.....

6. Zerlege in ein Produkt von Primfaktoren und schreibe falls möglich als Potenz!

- a) 165
- b) 630
- c) 257
- d) 585
- e) 280
- f) 5096

7. Zerlege die Zahl 4950 in ein Produkt aus möglichst vielen Faktoren; die Faktoren selbst sollen Primzahlen sein!

.....

.....

1. Faktoren und Teiler

Wie ändert sich der Wert eines Produkts, wenn beide Faktoren verdoppelt werden?
Der Wert des Produkts wird.....

Hinweis: Kreuze nur die richtige(n) Antwort(en) an!

- verdoppelt gleich bleiben halbiert
- vervierfacht verachtfach versechsfacht

Wie viele echte Teiler hat eine Zahl, deren Primfaktorzerlegung ein Produkt ist aus zwei gleichen Primfaktoren?

Achtung: Echte Teiler, sind die von 1 und der Zahl selbst verschiedenen Teiler.
Beispiel: Die Zahl 5 hat keinen echten Teiler, da 1 und 5 nicht als echte Teiler zählen.

Hinweis: Kreuze nur die richtige(n) Antwort(en) an!

- 1 2 3
- 4 5 6

2. Gib die Primfaktorzerlegung der Zahl 126 an und bestimme alle Teiler dieser Zahl!

3. Bestimme die Primfaktorzerlegung der Zahl 5202!

4. Wie heißen die drei nächst größeren Primzahlen nach 47 ?

5 Vervollständige den Satz

Eine Primzahl ist eine Zahl, die

1. Nenne die nächsten 10 Primzahlen.

$$P = \{ 2; 3; 5; 7; 11; \}$$

2. Nenne die nächsten 10 Quadratzahlen.

$$Q = \{ 1; 4; 9; 16; 25; \}$$

3. Setze die Zahlenfolge mit 4 weiteren Elementen sinnvoll fort.

$$6; 11; 9; 14; 12; 17; 15; 20;$$

4. Bestimme die Teilmengen von 48.

$$T(48) = \{ \}$$

5. Gib die Menge aller Zahlen an, die zu $T(48)$ und auch zu $V(3)$ gehören.

6. Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch ?

$$12 \in T(18) \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 103 \in V(1) \quad \underline{\hspace{2cm}} \quad 9 \in T(765) \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

7. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

a). $546 = \underline{\hspace{10cm}}$

b). $2145 = \underline{\hspace{10cm}}$

8. Bestimme die Teiler von 546

9. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Die Summe dreier zweistelliger Primzahlen ist stets ungerade

b) Die Differenz von zwei zweistelligen Primzahlen ist immer größer als 2.

1. Zerlege in Primfaktoren

a) $9100 =$ _____

b) $441 =$ _____

2. Bekanntlich sind 2, 3, 5, 7, 11 usw. die kleinsten Primzahlen.

Algie hat begonnen, diese zu multiplizieren, weil er wissen möchte auf wie vielen Nullen das Produkt der ersten tausend Primzahlen endet!

Natürlich hat Gomie keine Lust für diese tagelange Rechnerei. Er denkt eine Weile nach und überrascht Algie dann mit der Lösung!

Findest du sie auch? Begründe Deine Antwort!

3. Zerlege die Zahl 234 in Primfaktoren und bestimme daraus alle Teiler der Zahl.

4. Gib alle Ziffern an, die man für die Leerstelle einsetzen darf, damit die Zahl 45671 ___ durch

a) 4 teilbar ist? Antwort: _____

b) 9 teilbar ist? Antwort: _____

5.

a) Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl 1980

b) Die Primfaktorzerlegung einer Zahl z ist $2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11$

Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die 11 mal so groß ist wie die Zahl z ?

c) Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die der 10. Teil der Zahl z ist?

d) Wieso ist 14 kein Teiler der Zahl z ?

1. Gib an, was man unter einer Primzahl versteht!

Streiche die Zahlen durch, die keine Primzahlen sind:

1; 2; 13; 14; 7; 29; 81

2. Lena sagt: „ Der Altersunterschied zwischen meinem kleinen Bruder und mir beträgt fünf Jahre. Sein Alter ist eine Primzahl, mein Alter ist ein Vielfaches von vier. In einem Jahr ist mein Alter eine Primzahl und sein Alter durch sechs teilbar.“

Lena ist heute _____ Jahre alt,

ihr Bruder _____ Jahre.

3. Was versteht man unter einer Primzahl? _____

4. Nenne vier Primzahlen! _____

5. Notiere alle Primzahlen zwischen 30 und 45

6. Untersuche, ob es sich jeweils um Primzahlen handelt!
(Begründe deine Antwort!!)

a) 25 _____

b) 73 _____

7. Zerlege in Primfaktoren und gib, wenn möglich, auch die Potenzschreibweise an:

a) 1890 =

b) 429 =

Primfaktorzerlegungen 1 - Lösungen

$$26 = 2 \cdot 13$$

$$48 = 2^4 \cdot 3$$

$$140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11$$

$$216 = 2^3 \cdot 3^3$$

$$446 = 2 \cdot 223$$

$$476 = 2^2 \cdot 7 \cdot 17$$

$$514 = 2 \cdot 257$$

$$820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$$

$$1820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$$

$$2480 = 2^4 \cdot 5 \cdot 31$$

$$78624 = 2^5 \cdot 3^3 \cdot 7 \cdot 13$$

$$207025 = 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2$$

Markus behauptet: „Eine Zahl, die sich aus lauter gleichen Zahlen zusammensetzt, die größer als 1 sind, kann keine Primzahl sein.“

Hat er Recht? Begründe deine Ansicht!

Er hat Recht, denn solche Zahlen, sind stets durch die jeweilige Ziffer, die sie erzeugt, ohne Rest teilbar. Ausgenommen sind dabei die einstelligen Zahlen 2, 3, 5 und 7, die selbst Primzahlen sind.

$$\begin{aligned} 2. \text{ a) } 1980 &= 10 \cdot 198 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 66 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 11 \\ &= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 \\ &= 22 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b} \quad 11 \cdot 1980 &= 22 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 112 \\ 1980 : 10 &= 198 = 2 \cdot 32 \cdot 11 \\ 14 &= 2 \cdot 7 \rightarrow \text{keine 7 in Aufgabe 3a} \end{aligned}$$

Primfaktorzerlegungen 2 - Lösungen

1. Ist 51 eine Primzahl? Begründe!

Nein, weil sie durch 3 teilbar ist und Primzahlen nur durch 1 und sich selbst teilbar sind.

2. Gib folgende Zahlen an:

a) Gerade Primzahl **2**

b) Nachfolger der kleinsten zweistelligen Quadratzahl. **17**

c) Vorgänger der größten zweistelligen Quadratzahl. **80**

d) Die Zahl ist die Summe aus der größten einstelligen und der kleinsten zweistelligen Primzahl. **$7 + 11 = 18$**

3. Überprüfe, ob die folgenden Zahlen Primzahlen sind, und begründe, falls sie es nicht sind.

a) 93 **falsch, da durch 3 teilbar**

b) 155 **falsch, da durch 5 teilbar**

4. Gib alle Primzahlen an, die größer als 20, aber kleiner als 60 sind.

23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

5. Zerlege die Zahl 84 vollständig in Primfaktoren.

$$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

6. Zerlege in ein Produkt von Primfaktoren und schreibe falls möglich als Potenz!

a) $165 = 5 \cdot 33$

$$= 5 \cdot 3 \cdot 11$$

b) $630 = 10 \cdot 63$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3$$

$$= 2 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

c) $256 = 2 \cdot 128$

$$= 2 \cdot 4 \cdot 32$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8$$

$$= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$= 2^8$$

d) $585 = 3 \cdot 195 = 3 \cdot 3 \cdot 65 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$

$$= \underline{3^2 \cdot 5 \cdot 13}$$

e) $280 = \dots 2 \times 140 = 2 \times 2 \times 70 = 2 \times 2 \times 2 \times 35 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 7 = 2 \times 5 \times 7 = 280$

f) $5096 = 2 \cdot 2548 = 2 \cdot 2 \cdot 1274 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 637 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 91 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 13$;

(Potenzschreibweise: $2^3 \cdot 7^2 \cdot 13$)

7. Zerlege die Zahl 4950 in ein Produkt aus möglichst vielen Faktoren; die Faktoren selbst sollen Primzahlen sein!

$$4950 = 10 \cdot 495 = 2 \cdot 5 \cdot 99 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 33 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 5$$

Primfaktorzerlegungen 3 - Lösungen

1. Faktoren und Teiler

Wie ändert sich der Wert eines Produkts, wenn beide Faktoren verdoppelt werden?

Der Wert des Produkts wird.....

Hinweis: Kreuze nur die richtige(n) Antwort(en) an! **vervierfacht**

Wie viele echte Teiler hat eine Zahl, deren Primfaktorzerlegung ein Produkt ist aus zwei gleichen Primfaktoren? Kreuze nur die richtige(n) Antwort(en) an! **1**

2. Gib die Primfaktorzerlegung der Zahl 126 an und bestimme alle Teiler dieser Zahl!

$$126 = 2 \cdot 63 = 2 \cdot 3 \cdot 21 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$T = (1, 2, 3, 6, 7, 9, 14, 18, 21, 42, 63, 126)$$

3. Bestimme die Primfaktorzerlegung der Zahl 5202!

5202		2
2601		3
867		3
289		17
17		17

$$5202 = 2 \cdot 3^2 \cdot 17^2$$

4. Wie heißen die drei nächst größeren Primzahlen nach 47 ?

53

59

61

5. Vervollständige den Satz

Eine Primzahl ist eine Zahl, die **genau zwei Teiler hat (nicht mehr und nicht weniger)**. Die **Eins ist keine Primzahl**.

Primfaktorzerlegungen 4 - Lösungen

1. Nenne die nächsten 10 Primzahlen.

$$P = \{ 2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; \}$$

2. Nenne die nächsten 10 Quadratzahlen.

$$Q = \{ 1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; \}$$

3. Setze die Zahlenfolge mit 4 weiteren Elementen sinnvoll fort.

$$6; 11; 9; 14; 12; 17; 15; 20; 18; 23; 21; 26; \}$$

4. Bestimme die Teilmengen von 48.

$$T(48) = \{ 1; 2; 3; 4; 6; 8; 12; 16; 24; 48; \}$$

5. Gib die Menge aller Zahlen an, die zu $T(48)$ und auch zu $V(3)$ gehören.

$$\{ 3; 6; 12; 24; 48; \}$$

6. Sind die folgenden Behauptungen richtig oder falsch?

$$12 \in T(18) \text{ falsch} \quad 103 \in V(1) \text{ richtig} \quad 9 \in T(765) \text{ falsch}$$

7. Bestimme die Primfaktorzerlegung von

$$\text{a). } 546 = 546 = 2 \times 273$$

$$273 = 3 \times 91$$

$$91 = 7 \times 13$$

$$546 = 2 \times 3 \times 7 \times 13$$

$$\text{b). } 2145 = 2145 = 5 \times 429$$

$$429 = 3 \times 143$$

$$143 = 11 \times 13$$

$$2145 = 3 \times 5 \times 11 \times 13$$

8. Bestimme die Teiler von 546

$$T_{546} \{ 1, 2, 3, 6, 7, 13, 14, 21, 26, 39, 42, 78, 91, 182, 273, 546 \}$$

9. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

a) Die Summe dreier zweistelliger Primzahlen ist stets ungerade

richtig (2-stellige Primzahl immer ungerade)

b) Die Differenz von zwei zweistelligen Primzahlen ist immer größer

als falsch (z. B. $43 - 41 = 2$, $13 - 11 = 2$)

Primfaktorzerlegungen 5 - Lösungen

1. Zerlege in Primfaktoren

$$\text{a) } 9100 = 91 \cdot 1000 = 7 \cdot 13 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$$

$$\text{b) } 441 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$$

2. Bekanntlich sind 2, 3, 5, 7, 11 usw. die kleinsten Primzahlen.

Das Produkt der ersten tausend Primzahlen ist durch 10 teilbar, denn $2 \cdot 5 = 10$:

Es ist aber nicht durch 100 teilbar, denn $100 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ (das sind ja mehrere Zweier und

Fünfer!) Also endet das Produkt der ersten tausend Primzahlen nur auf einer Null.

3. Zerlege die Zahl 234 in Primfaktoren und bestimme daraus alle Teiler der Zahl.

$$234 = 2 \cdot 117 = 2 \cdot 3 \cdot 39 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 13$$

$$\text{Teiler} = \{ 1, 2, 3, 6, 9, 13, 18, 26, 39, 78, 117, 234 \}$$

4. Gib alle Ziffern an, die man für die Leerstelle einsetzen darf,

damit die Zahl 45671 ___ durch

a) 4 teilbar ist? Antwort: 0, 2, 4, 6, 8

b) 9 teilbar ist? Antwort: 5

5.

a) Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl 1980

$$1980 = 10 \cdot 198$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 66$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 11$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11$$

$$= 22 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 11$$

b) Die Primfaktorzerlegung einer Zahl z ist $2 \cdot 33 \cdot 52 \cdot 11$

$$11 \cdot 1980 = 22 \cdot 32 \cdot 5 \cdot 112$$

c) Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die 11 mal so groß ist wie die Zahl z? $1980 : 10 = 198 = 2 \cdot 32 \cdot 11$

Wie lautet die Primfaktorzerlegung der Zahl, die der 10. Teil der Zahl z ist?

d) Wieso ist 14 kein Teiler der Zahl z? $14 = 2 \cdot 7$ keine 7 in Aufgabe 3a

Primfaktorzerlegungen 6 - Lösungen

1. Gib an, was man unter einer Primzahl versteht!

Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie genau zwei Teiler hat, 1 und sich selber.

Streiche die Zahlen durch, die keine Primzahlen sind:

~~1~~; 2; 13; ~~14~~; 7; 29; ~~81~~

2. Lena sagt: „ Der Altersunterschied zwischen meinem kleinen Bruder und mir beträgt fünf Jahre. Sein Alter ist eine Primzahl, mein Alter ist ein Vielfaches von vier. In einem Jahr ist mein Alter eine Primzahl und sein Alter durch sechs teilbar.“

Lena ist heute 16 Jahre alt, ihr Bruder 11 Jahre

3. Was versteht man unter einer Primzahl? = nur durch sich selbst und 1 teilbar

4. Nenne vier Primzahlen! 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17

5. Notiere alle Primzahlen zwischen 30 und 45 31,37,41,43

6. Untersuche, ob es sich jeweils um Primzahlen handelt!

(Begründe deine Antwort!!)

a) 25 $T(25) = \{1; 25\}$ - 25 ist keine Primzahl

b) 73 $T(73) = \{1; 73\}$ - 73 ist eine Primzahl

7. Zerlege in Primfaktoren und gib, wenn möglich, auch die Potenzschreibweise an:

a) $1890 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^3$

b) $429 = 3 \cdot 143 = 3 \cdot 11 \cdot 13$