Lösung zur Zentralen Klassenarbeit Baden-Würtemberg
Fach Mathematik, Haupttermin 2003

Aufgabe 1)

a) $$\left[\frac{b^3}{a^{n-2}} : \frac{b^5}{c^{2n}}\right] : \frac{c^{2n}}{a^{n+3}} = \frac{b^3}{a^{n-2}}\,\frac{c^{2n}}{b^5}\,\frac{a^{n+3}}{c^{2n}} = \frac{a^{n+3}}{a^{n-2}}\,\frac{b^3}{b^5}\,\frac{c^{2n}}{c^{2n}} = a^{n+3-(n-2)} \cdot b^{3-5} = \frac{a^5}{b^2}$$

b) $3^{2x} - 3^x = 6, \qquad$ Substitution: $z = 3^x$

$z^2 - z = 6 \;\rightarrow\; z^2 - z - 6 = 0$

$$z_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}\,, \qquad z_1 = \frac{6}{2} = 3\,,\; z_2 = -\frac{4}{2} = -2$$

Resubstitution: $3^{x_1} = 3 \;\Rightarrow\; x_1 = 1\,,\; 3^{x_2} = -2 \;\Rightarrow\;$ keine Lösung für x_2!

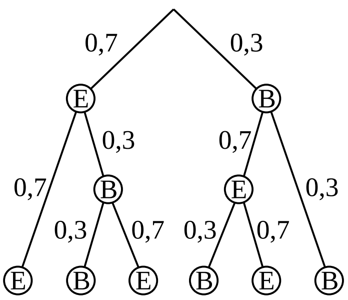
$\mathbb{L} = \{1\}$

c) $u = \left(10^{10}\right)^{10} = 10^{10\cdot 10} = 10^{100} \;\rightarrow\;$ 100 Nullen $\;\rightarrow\;$ 101 Stellen

$v = 10^{10^{10}} \;\rightarrow\; 10^{10} = 10$ Milliarden Nullen $\;\rightarrow\; 10^{10} + 1$ Stellen

Druckzeit: u: $t_u = \dfrac{101}{150}\,\mathrm{s} \approx 0,67\,\mathrm{s}\,,\;$ u: $t_v = \dfrac{10^{10}}{150}\,\mathrm{s} = \dfrac{10^9}{15}\,\mathrm{s} = \dfrac{2\cdot 10^8}{3}\,\mathrm{s} \approx 771\,\mathrm{d}$

Aufgabe 2)



Eva gewinnt bei folgenden Pfaden: EE, EBE, BEE. Nach der Pfadadditionsregel ist also die Wahrscheinlichkeit daß Eva gewinnnt: $P(E_G) = 0,7\cdot 0,7 + 0,7\cdot 0,3\cdot 0,7 + 0,3\cdot 0,7\cdot 0,7 = 0,7^2\,(1 + 2\cdot 0,3) = 0,7^2 \cdot 1,6 = 0,784$

Nur auf den beiden Pfaden EE und BB werden zwei Sätze gespielt. Auf den übrigen Pfaden sind es drei. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Sätze gespielt werden, beträgt nach der Pfadadditionsregel: $\mathrm{P}(2) = 0,7^2 + 0,3^2 = 0,58$. Die Wahrscheinlichkeit, daß drei Sätze gespielt werden, beträgt demnach: $\mathrm{P}(3) = 1 - \mathrm{P}(2) = 0,42$.

Aufgabe 3)

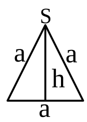
a)

Volumen des Packsacks: $V_{\mathrm{PS}} = \pi \cdot \frac{d^2}{4} \cdot h = \pi \cdot 36\,\mathrm{cm}^2 \cdot 6\,\mathrm{dm} = \frac{\pi}{100} \cdot 36 \cdot 6\,\mathrm{dm}^3 \approx 6,8\,\mathrm{dm}^3$

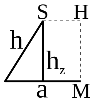
$\Rightarrow$ Relatives Leervolumen: $\frac{6,8-5}{6,8} \approx 0,26$. Es bleiben also 26 % des Packsacks leer.

b)

Um die Gesamtlänge der Zeltstangen berechnen zu können, müssen erst einige andere Größen des Zeltes berechnet werden, wobei der Satz des Pythagoras mehrfach zur Anwendung kommt.

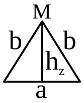
Länge der Höhe einer Zeltfläche: 

$h^2 = a^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}\,a \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

Länge der Höhe des Zeltes: 

$h_{\mathrm{Z}}^2 = h^2 - (\frac{a}{2})^2 = \frac{3}{4}\,a^2 - \frac{1}{4}\,a^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow h_{\mathrm{Z}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,a$

Länge von $\overline{\mathrm{SH}}$: An vorangegangener Grafik erkennt man leicht: $\overline{\mathrm{SH}} = \frac{a}{2}$

Länge von b: 

$b^2 = (\frac{a}{2})^2 + h_Z^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{3}{4}\,a^2 \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a$

Gesamtlänge: $L_{\text{Ges}} = 4 \cdot a + 2 \cdot b + \overline{\text{SH}} = 4\,a + 2\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a + \frac{a}{2} = a\,(\frac{9}{2} + \sqrt{3}) \approx 13,7\,\text{m}$

c)

Die Oberfläche des Zeltes besteht aus 3 Dreiecken des Pyramidendachs, dem Pyramidenboden, 2 Dreiecken des Vorbaudachs und dem Zelteingang:
$O_{\text{Ges}} = 3 \cdot \frac{1}{2}\,a\,h + a^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\,b\,\overline{\text{SH}} + \frac{1}{2}\,a\,h_Z = \frac{3}{2}\,a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a + a^2 + 2\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,a\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\,a\frac{\sqrt{2}}{2}\,a =$
$\frac{3\sqrt{3}}{4}\,a^2 + a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}\,a^2 = \frac{a^2}{4}\,(3\,\sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} + \sqrt{2}) \approx 3,09 \cdot a^2 \approx 14,9\,\text{m}^2$
Das Zelt ist aus zwei Pyramiden aufgebaut. Zum einen aus der regelmäßigen Hauptpyramide und zum anderen aus der Vorbaupyramide. Letztere läßt sich leicht berechnen, wenn man den Eingang als Grundfläche und die Strecke $\overline{\text{SH}}$ als Höhe nimmt. Für das Gesamtvolumen ergibt sich folglich:
$V_{\text{Ges}} = \frac{1}{3}\,a^2\,h_Z + \frac{1}{3}\,\frac{1}{2}\,a\,h_Z\,\frac{a}{2} = \frac{1}{3}\,a^2\,h_Z\,(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{12}\,a^2\,h_Z = \frac{5}{12}\,a^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,a = \frac{5\,\sqrt{2}}{24}\,a^3 \approx 3,14\,\text{m}^3$

Aufgabe 4)

a)

Exponentielles Wachstum: $A(t) = A(0) \cdot a^t$
Verdopplungszeit $T_V = 9\,\text{Monate}$, Anfangspopulation $A(0) = 50$
Hieraus erhält man zwei Gleichungen: $A(9) = 2 \cdot A(0)$ und $A(9) = A(0) \cdot a^9$
Durch Gleichsetzen ergibt sich für den Wachstumsfaktor a: $2 \cdot A(0) = A(0) \cdot a^9 \Rightarrow a = \sqrt[9]{2}$
Proz. Änderung in einem Monat: $\frac{A(t+1) - A(t)}{A(t)} = \frac{A(0)\,(\sqrt[9]{2})^{t+1} - A(0)\,(\sqrt[9]{2})^t}{A(0)\,(\sqrt[9]{2})^t} = \sqrt[9]{2} - 1 \approx 0,08$
Die Anzahl der Mäuse ändert sich in einem Monat um 8 %.

$1000 = 50\,(\sqrt[9]{2})^t \Rightarrow 20 = (\sqrt[9]{2})^t \Rightarrow \log(20) = t \;\Rightarrow t = \frac{\log(20)}{\log(\sqrt[9]{2})} \approx 39\,\text{Monate} \approx 3,3\,\text{y}$
Nach 39 Monaten wäre die Mäusepopulation auf 1000 angewachsen.

b)

Gegeben: $A(0) = B(0) = 50\,,\; B(1) = 120\,,\; S = 1000$
Durch Einsetzen in die angegebene Formel für logistisches Wachstum ergibt sich für k:
$B(1) = B(0) + k\,B(0)(S - B(0)) \Rightarrow k = \frac{B(1) - B(0)}{B(0)(S - B(0))} = \frac{120 - 50}{50\,(1000 - 50)} = \frac{7}{4750} \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$
$B(2) = B(1) + k\,B(1)(1000 - B(1)) = 120 + \frac{7}{4750}\,120(1000 - 120) \approx 276$
$B(3) = B(2) + k\,B(2)(1000 - B(2)) \approx 570$
Am Ende des zweiten Jahres sind 276 Mäuse und am Ende des dritten Jahres sind 570 Mäuse zu erwarten.

c)

Addiert man auf beiden Seiten der angegebenen Seiten B(t) und vergleicht mit der unter Aufgabe b) angegebenen Gleichung, so ergeben sich für S und k folgende Werte:
$B(t+1) = B(t) + \underbrace{0,8}_{k \cdot S}\,B(t) - \underbrace{0,0001}_{k}\,(B(t))^2$

$\Rightarrow k \cdot S = 0,8 \wedge k = 0,0001 \Rightarrow S = \frac{0,8}{k} = 0,8 \cdot 10000 = 8000$
Langfristig ist mit einem Bestand von 8000 Mäusen zu rechnen.