<u>Übungsschulaufgabe aus der Mathematik (GESAMT: 31 BE)</u>

(Die Aufgaben sind nach aufsteigender Schwierigkeit angeordnet)

1. Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$.

a. Geben Sie die Definitionsmenge an. **(0,5 BE)**

b. Untersuchen Sie die Funktion auf ihre Symmetrieeigenschaften. **(1 BE)**

c. Geben Sie den Grenzwert von f für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an. **(1 BE)**

d. Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte, Art und Lage der (lokalen) Extrema und Wendepunkte der Funktion. **(3 BE)**

e. Geben Sie das Steigungs- und das Krümmungsverhalten an. **(2 BE)**

f. Skizzieren Sie anhand der bisherigen Ergebnisse den Graphen. **(1 BE)**

g. Welche Gleichung hat die Wendetangente? **(1,5 BE)**

2. Gegeben sei die Funktionsschar $f_k(x) = \frac{1}{x} + x - k$ mit $k \in R$.

a. Geben Sie die Definitionsmenge der Schar an. **(0,5 BE)**

b. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k. **(2 BE)**

c. Gibt es einen Punkt, in welchem sich alle Funktionen der Schar schneiden? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch und logisch! **(1,5 BE)**

d. Bestimmen Sie die Lage der Extrema in Abhängigkeit von k. Gibt es Wendepunkte? Begründen Sie Ihre Antwort mathematisch! **(1,5 BE)**

3.

a. Geben Sie die Schar aller achsensymmetrischen Funktionen vierten Grades an, welche ein Extremum im Punkt $P(1;1)$ haben. **(2 BE)**

[Ergebnis: $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot k \cdot x^2 + k + 1$*]*

b. Geben Sie die weiteren Extremas dieser Funktionen in Abhängigkeit von k an. **(1 BE)**

c. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen dieser Funktionen in Abhängigkeit von k. **(2 BE)**

4. In einem Sägewerk sollen in einem Jahr aus 1000 runden Baumstämmen mit Radius $r = 1\,m$ und der Länge $l = 1\,m$ 1000 Balken in Form eines Quaders herausgesägt werden, die ein möglichst großes Volumen besitzen.

a. Bestimmen Sie die optimalen Abmessungen des Balkens und geben Sie das maximale Volumen an. **(2 BE)**

b. Im ersten Jahr kann der Sägewerksbesitzer 70% der Balken zum Preis von je 100 Euro verkaufen, im zweiten Jahr 80% zum Preis von je 80 Euro.
Wie kann er, unter Annahme einer linearen Beziehung zwischen dem Preis und der verkauften Stückzahl, dieses Jahr den größtmöglichen Umsatz erzielen? **(1,5 BE)**

c. Welchen Gewinn macht er bei diesem Umsatz, wenn ihn jeder der verkauften Balken in der Herstellung 40 Euro kostet und er fixe Ausgaben von 30000 Euro hat?
Wie kann er mehr Gewinn erzielen? **(2 BE)**

d. Berechnen Sie, wie viele ganze Baumstämme ihm durch die nicht verwertbaren Baumstammreste verloren gehen, und geben Sie die Gleichung an, mit der man den sich ergebenden maximalen Gewinn und den veränderten Stückpreis berechnen kann, würde man aus den Resten wieder Baumstämme gewinnen können. **(1,5 BE)**

5. Beweisen Sie, dass gilt: $\left(2 \cdot z^3 - 2\right) \bmod \left(2 \cdot z + 1 - \sqrt{3} \cdot i\right) = 0$.

(d.h. $2 \cdot z^3 - 2$ ist ohne Rest durch $2 \cdot z + 1 - \sqrt{3} \cdot i$ teilbar)

(Formelsammlung benutzen!) **(3,5 BE)**

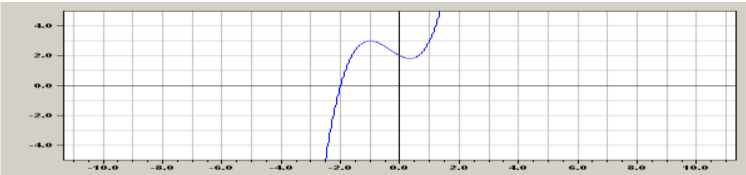
Notenabstufung:

31-26,5: 1; **26-22,5:** 2; **22-18:** 3; **17,5-13,5:** 4; **13-9,5:** 5; **9-0:** 6

PW

Lösungen der Übungsschulaufgabe

1. Aufgabe
   a. D=R
   b. Weder Achsen- noch Punktsymmetrie
   c. $x \to \infty : \infty$; $x \to -\infty : -\infty$
   d. $S_y(0/2)$; $S_x(-2/0)$; $HP(-1/3)$; $TP(\frac{1}{3}/\frac{49}{27})$; $WP(-\frac{1}{3}/\frac{65}{27})$
   e. Steigungsverhalten: Steigen: $]-\infty;-1[$ *und* $]\frac{1}{3};\infty[$; Fallen: $]-1;\frac{1}{3}[$

      Krümmungsverhalten: $]-\infty;-\frac{1}{3}[$ rechts-; $]-\frac{1}{3};\infty[$ linksgekrümmt.
   f. 

   g. $y = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{53}{27}$

2. Aufgabe
   a. D=R\{0}
   b. $-2 < k < 2$: 0 ; $k = -2; k = 2$: 1; $k < -2; k > 2$: 2
   c. Nein. Mathematische Begründung: Einzige Lösung nicht in D. Logische Begründung: k verschiebt nur => parallele Kurven.
   d. $Ext_1(-1/-k-2)$; $Ext_2(1/-1)$

      Nein. Begründung: Zweite Ableitung nie 0.

3. Aufgabe

   a. $f_k(x) = k \cdot x^4 - 2 \cdot k \cdot x^2 + k + 1$

   b. $Ext_2(-1/1)$; $Ext_3(0/k+1)$

   c. $k \geq 0$: 0 ; $k < 0$: 1

4. Aufgabe

   a. $x = y = \sqrt{2}\ m$; $V = 2\ m^3$

   b. Er sollte 600 Balken zum Stückpreis von 120 € verkaufen. So erhält er einen Umsatz von 72000 €.

   c. Bei diesem Umsatz macht er einen Gewinn von 18000 €. Er könnte einen Gewinn von 20000 € erzielen, wenn er 500 Balken zum Stückpreis von 140 Euro verkauft.

   d. Ihm gehen 363 ganze Baumstämme verloren. Gleichung:

$$G(x) = (\frac{70}{100} \cdot 1363 + \frac{10}{100} \cdot 1363 \cdot x) \cdot (60 - 20 \cdot x) - 30000$$

5. Aufgabe

$$1 \cdot E(1 \cdot 120°) = \cos(120°) + \sin(120°) \cdot i = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot i$$