Klasse 11 b **4. Schulaufgabe aus der Mathematik**

1. Untersuche die Funktion f an der Stelle $x_0 = 2$ auf Differenzierbarkeit.

$$f: \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 2 & \text{für} \quad x < 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{für} \quad x \geq 2\,. \end{cases}$$

2. Ein Parabolspiegel ist ein Hohlspiegel in der Form eines Rotationsparaboloids.

   Bringt man in den Brennpunkt P des Spiegels eine punktförmige Lichtquelle, dann werden die Lichtstrahlen so reflektiert, dass ein paralleles Lichtbündel entsteht.

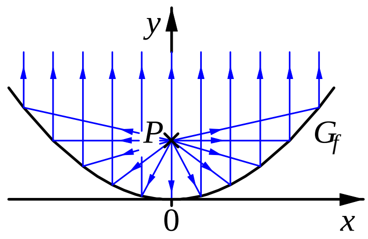
   Die Reflexion am Spiegel gehorcht dabei dem Reflexionsgesetz:
   Einfallswinkel α = Ausfallswinkel α'.

   Der hier betrachtete Spiegel ist durch Rotation aus der durch

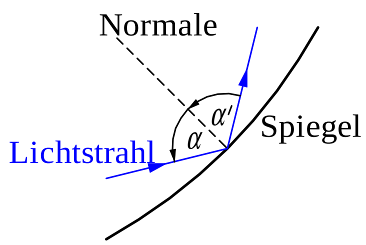
$$f: \quad x \mapsto \tfrac{1}{8}x^2, \qquad D = [-5; 5]$$

   gegebenen Parabel hervorgegangen.

   Bestimme die y-Koordinate von P.



Parabolspiegel: Schnitt



Zum Reflexionsgesetz

3. Stelle den Funktionsterm der Ableitungsfunktion auf und vereinfache ihn.

   a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

   c) $f(x) = 2x^2 \sin 3x$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}}$

4. Gegeben ist die Funktion

$$f: \quad x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 - x^2 - 2x}\,, \quad D_f = D_{\max}\,.$$

   a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich D_f der Funktion.
   b) Gib den Funktionsterm der stetigen Fortsetzung $\overline{f}$ von f an.

5. Gib die Monotonieintervalle von f an.

$$f: \quad x \mapsto \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 16x + 12\,, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Viel Erfolg!

Klasse 11 b **4. Schulaufgabe aus der Mathematik**

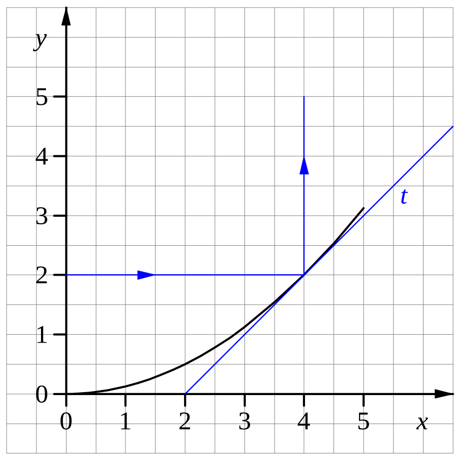
– Musterlösung 1 –

1. $$f: \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 2 & \text{für} \quad x < 2 \\ 2\sqrt{x-1} & \text{für} \quad x \geq 2\ . \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-} \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 - 2 + 2 = 2 \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \left(2\sqrt{x-1}\right) = 2\sqrt{2-1} = 2 \\ f(2) = 2\sqrt{2-1} = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ stetig bei } x_0 = 2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2-} (x-1) = 2 - 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+} \left(\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2-1}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ differenzierbar bei } x_0 = 2.$$

2. $f: \quad x \mapsto \frac{1}{8}x^2, \qquad D = [-5; 5]\,.$



Es gibt einen Lichtstrahl, der den Brennpunkt waagerecht verläßt und anschließend senkrecht nach oben reflektiert wird. Die Parabel muss an dieser Stelle daher die Steigung 1 haben.

$f'(x) = \frac{1}{4}x \quad$ Forderung: $\quad f'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}x &= 1 \\ x &= 4 \\ y = f(4) &= \tfrac{1}{8} \cdot 4^2 = 2 \end{aligned}$$

3. Stelle den Funktionsterm der Ableitungsfunktion auf und vereinfache ihn.

a) $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$

$$f'(x) = \frac{3 \cdot (2x+1) - 3x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{6x + 3 - 6x}{(2x+1)^2} = \frac{3}{(2x+1)^2}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

c) $f(x) = 2x^2 \sin 3x$

$$f'(x) = 4x \sin 3x + 2x^2 \cdot 3 \cos 3x = 4x \sin 3x + 6x^2 \cos 3x$$

d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2}} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{x^2}}$

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{2\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x^3\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

4. $$f: \quad x \mapsto \frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-2x} \;, \quad D_f = D_{\text{Max}} \;.$$

a) Faktorisiere den Nenner:

$$x^3 - x^2 - 2x = x\left(x^2 - x - 2\right) = x(x-2)(x+1)$$
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$$

b) 2 und -1 sind auch Nullstellen des Zählerpolynoms. Deshalb:

$$\left(x^3 + 2x^2 - 5x - 6\right) : (x-2) = x^2 + 4x + 3$$
$$\left(x^2 + 4x + 3\right) : (x+1) = x + 3$$
$$2x^2 + x^3 - 5x - 6 = (x-2)(x+1)(x+3)$$

$$\overline{f}(x) = \frac{(x-2)(x+1)(x+3)}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x+3}{x} = 1 + \frac{3}{x}$$

5. $$f: \quad x \mapsto \tfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 16x + 12 \;, \quad D_f = \mathbb{R}.$$

Faktorisiere die Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^2 - 6x - 16 \\ &= (x+2)(x-8) \end{aligned}$$

Vorzeichentabelle der Ableitung:

		-2		8	
$x+2$	$-$		$+$		$+$
$x-8$	$-$		$-$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$
	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Monotonieintervalle:

$I_1 =]-\infty; -2[$: streng monoton **steigend**
$I_2 =]-2; 8[$: streng monoton **fallend**
$I_3 =]8; \infty[$: streng monoton **steigend**