1. Gegeben ist die Funktion

$$f: \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{für} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{für} \quad x \geq 0 \,. \end{cases}$$

   Untersuche f an der Stelle $x_0 = 0$ auf Differenzierbarkeit.

2. Stelle den Differentialquotienten der Kosinus-Funktion an der Stelle x auf. Leite daraus die Ableitungsfunktion von $f(x) = \cos(x)$ her.

3. Stelle die Ableitungsfunktionen zu nachfolgenden Funktionen auf.
   a) $f(x) = -4x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$
   b) $f(x) = \frac{3}{2x} + 4\sqrt{x}\,, \quad x > 0$
   c) $f(x) = 2ax^2 - \frac{b}{x}\,, \quad x \neq 0$
   d) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x}\,, \quad x \neq 0$

4. Betrachtet werden die Funktionen

$$f: \quad x \mapsto x^2 - 6x + 11, \quad D_f = \mathbb{R}\,,$$
$$g: \quad x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9, \quad D_f = \mathbb{R}\,,$$

   deren Funktionsgrafen G_f und G_g einen gemeinsamen Punkt T und darin eine gemeinsame Tangente t aufweisen.
   a) Ermittle **mit Hilfe der Ableitungsfunktionen** die Koordinaten der Scheitelpunkte S_f und S_g beider Funktionsgrafen.
   b) Bestimme die Koordinaten von T. Ergebnis: $T(2|3)$
   c) Zeichne beide Funktionen in ein Koordinatensystem, das den Ursprung und den Punkt $(10|10)$ enthält.
   d) Stelle die Gleichung der Tangente t auf.
   e) Begründe, dass t eine gemeinsame Tangente ist.
   f) Zeichne die gemeinsame Tangente in das Koordinatensystem aus c) ein.

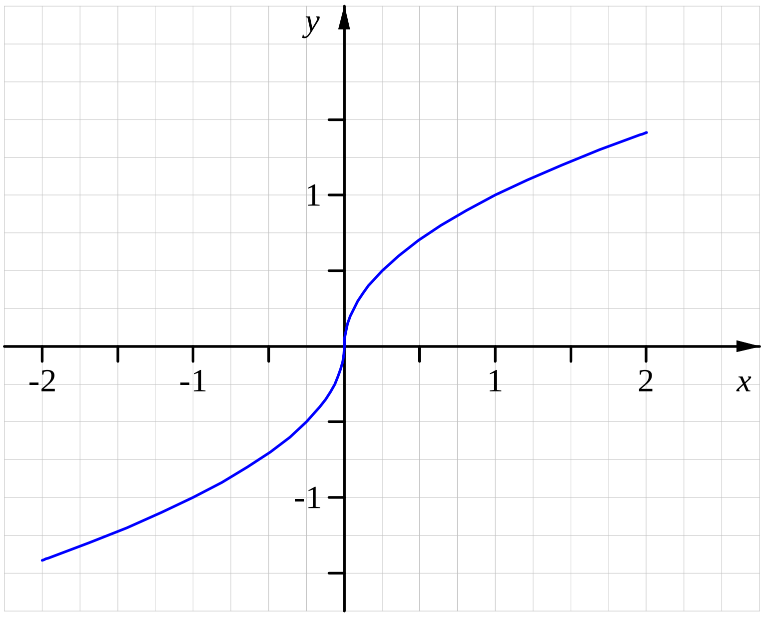
Viel Erfolg!

1.
$$f: \quad x \mapsto \begin{cases} -\sqrt{-x} & \text{für} \quad x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{für} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0-} \frac{-\sqrt{-(0+h)}-\sqrt{0}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0-} \frac{-\sqrt{-0-h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0-} \frac{-\sqrt{-h}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0-} \frac{-\left(\sqrt{-h}\right)^2}{h\sqrt{-h}} = \lim_{h\to 0-} \frac{-(-h)}{h\sqrt{-h}} = \lim_{h\to 0-} \frac{h}{h\sqrt{-h}} \\
&= \lim_{h\to 0-} \frac{1}{\sqrt{-h}} = \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ f ist an der Stelle $x_0 = 0$ **nicht** differenzierbar.

Skizze (nicht verlangt):



2. Ableitung der cos-Funktion:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \ldots$$

$$: \quad \text{Formelsammlung S. 39 Nr. 8:} \quad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned}
\ldots &= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[-\sin\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right] = \lim_{h\to 0}\left[-\sin\frac{2x+h}{2}\right]\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\to 1} = -\sin\frac{2x}{2} \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

3. a) $f(x) = -4x^3 + \frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{2}$ $\qquad f'(x) = -12x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

   b) $f(x) = \frac{3}{2x} + 4\sqrt{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x} + 4\sqrt{x}$ $\qquad f'(x) = -\frac{3}{2x^2} + \frac{4}{2\sqrt{x}} = -\frac{3}{2x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

   c) $f(x) = 2ax^2 - \frac{b}{x}$ $\qquad f'(x) = 4ax + \frac{b}{x^2}$

   d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x} = x - \frac{4}{x}$ $\qquad f'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}$

4. Gegeben:

$$f: \quad x \mapsto x^2 - 6x + 11$$
$$g: \quad x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 \ .$$

   a) Ableitungen:

$$f'(x) = 2x - 6 \ ,$$
$$g'(x) = x - 4 \ .$$

   Scheitelpunkt verlangt eine Nullstelle der Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 \\ f(3) &= 3^2 - 6 \cdot 3 + 11 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_f(3|2)\,; \end{aligned}$$

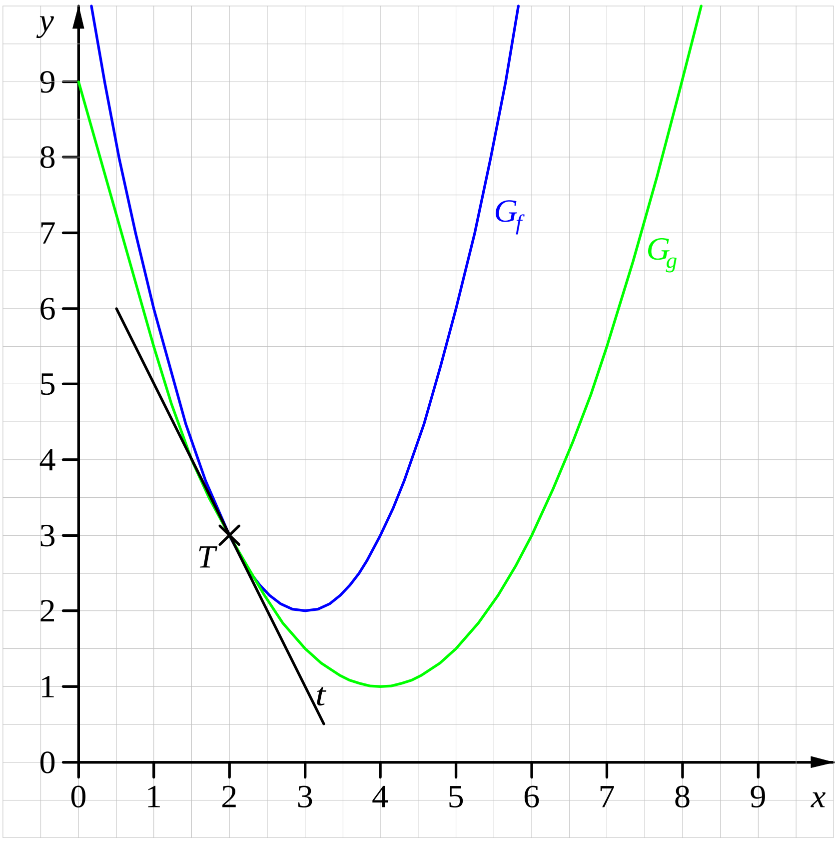
   ebenso

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ x - 4 &= 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 4 \\ g(4) &= \frac{1}{2} \cdot 4^2 - 4 \cdot 4 + 9 = 1 \quad \Rightarrow \quad S_g(4|1)\,; \end{aligned}$$

   b) Gemeinsame Punkte:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ x^2 - 6x + 11 &= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9 \\ \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \\ f(2) &= 2^2 - 6 \cdot 2 + 11 = 3 \quad \Rightarrow \quad T(2|3) \end{aligned}$$

c) f)



d) Tangentengleichung:

$$f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$$
$$g'(2) = 2 - 4 = -2$$
$$t: \quad y = -2(x-2) + 3 = -2x + 7$$

e) Die Tangenten beider Grafen fallen zusammen,

– weil ihre Steigungen gleich sind, denn $f'(2) = g'(2)$

– und sie einen gemeinsamen Punkt T haben.