3. Klassenarbeit in Mathematik   Klasse 11 a/b

In der Arbeit sind keinerlei Hilfsmittel zugelassen.
Achte auf ordentliche Darstellung und saubere Dokumentation deiner Überlegungen.
Lösungen auf Konzept oder dem Aufgabenblatt werden nicht gewertet.

Name: ....

Viel Erfolg!

Nr. 1

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$.

a) Begründe, warum das Schaubild von f weder Symmetrie zur y-Achse noch zum Ursprung besitzt.

b) Untersuche die Funktion f auf ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

c) Welche Punkte haben das Schaubild von f und die Koordinatenachsen gemeinsam?

d) Fertige zum Schaubild von f eine Skizze an.

Nr. 2

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = 2x - 4$ und g mit $g(x) = -x^3 + 9x + 2$.

a) Bestimme die Schnittpunkte der Schaubilder von f und g.

b) Fertige eine gemeinsame Skizze der beiden Schaubilder an.

Nr. 3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{(x+1)^2}$.

a) Bestimme die waagrechte und die senkrechte Asymptote des Schaubildes von f.

b) Fertige zum Schaubild von f eine Skizze an.

Nr. 4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$.

a) Weise nach, dass das Schaubild von f punktsymmetrisch bzgl. des Punktes Z(1/1) ist.

b) In welchen Punkten schneidet das Schaubild von f die Koordinatenachsen?

c) Bestimme die waagrechte und die senkrechte Asymptote des Schaubildes von f.

d) Fertige zum Schaubild von f eine Skizze an.

freiwillige Zusatzaufgabe (gut für Extrapunkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$.

a) Inwiefern gibt es ein Problem, wenn man diese Funktion auf Definitionslücken und Nullstellen untersucht?

b) Untersuche das Verhalten von f für $x \to 1 \pm 0$. Hinweis: Spalte zunächst im Nenner den Linearfaktor (x-1) per Polynomdivision ab.

Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$

a) Symmetrie

$f(x) = f(-x)$?

$f(-x) = (-x)^3 + 2(-x)^2 - 7(-x) + 4 = -x^3 + 2x^2 + 7x + 4 \neq f(x)$

→ nicht symmetrisch zur y-Achse

$f(x) = -f(-x)$?

$-f(-x) = -((-x)^3 + 2(-x)^2 - 7(-x) + 4) = -(-x^3 + 2x^2 + 7x + 4) = x^3 - 2x^2 - 7x - 4 \neq f(x)$

→ nicht symmetrisch zum Ursprung

b) Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) = \lim_{x \to +\infty} x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) \underline{\underline{\to +\infty}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(x^3 + 2x^2 - 7x + 4\right) = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right) \underline{\underline{\to -\infty}}$$

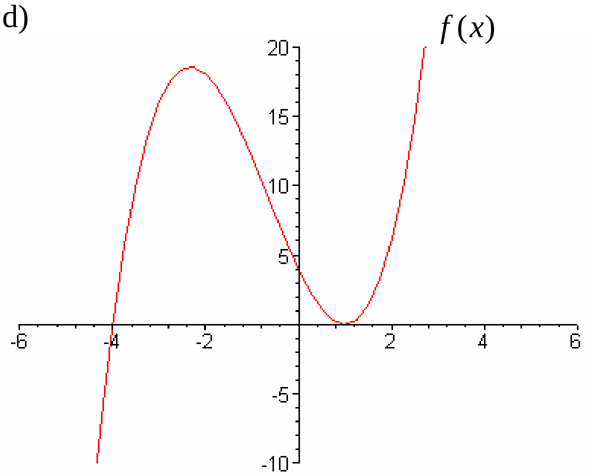
c) Schnittpunkt mit der y-Achse: $\underline{\underline{S_y(0/4)}}$

Schnittpunkte mit der x-Achse: $0 = x^3 + 2x^2 - 7x + 4$ → $\underline{\underline{x_{01} = 1}}$ (durch probieren) →

Polynomdivision → $(x^3 + 2x^2 - 7x + 4) : (x - 1) = x^2 + 3x - 4$ → $\underline{\underline{x_{02} = 1}}$, $\underline{\underline{x_{03} = -4}}$

$S_{x_{01}}(1/0)$, $S_{x_{02}}(-4/0)$

d)



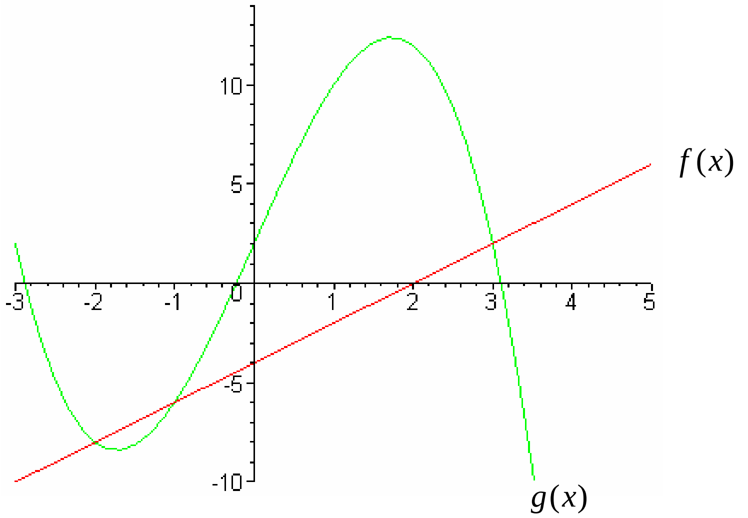
Aufgabe 2

$f(x) = 2x - 4 \quad g(x) = -x^3 + 9x + 2$

a) Schnittpunkte: $2x - 4 = -x^3 + 9x + 2 \rightarrow 0 = x^3 - 7x - 6 \rightarrow$ Polynomdivision $\rightarrow$
$\underline{\underline{x_{01} = -1}}$ (durch probieren) $\rightarrow (x^3 - 7x - 6) : (x+1) = x^2 - x - 6 \rightarrow \underline{\underline{x_{02} = 3}}$, $\underline{\underline{x_{03} = -2}}$

$S_1(-1/-6) \;\; S_2(3/2) \;\; S_3(-2/-8)$

b)



Aufgabe 3

$f(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$

a) Polstelle: $x_P = -1$

von rechts: $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{2}{(x+1)^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2}{(-1+\frac{1}{n}+1)^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2}{\frac{1}{n^2}}\right) \rightarrow +\infty$

von links: $\lim\limits_{x \to -1}\left(\dfrac{2}{(x+1)^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2}{(-1-\frac{1}{n}+1)^2}\right) = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\dfrac{2}{\frac{1}{n^2}}\right) \rightarrow +\infty$

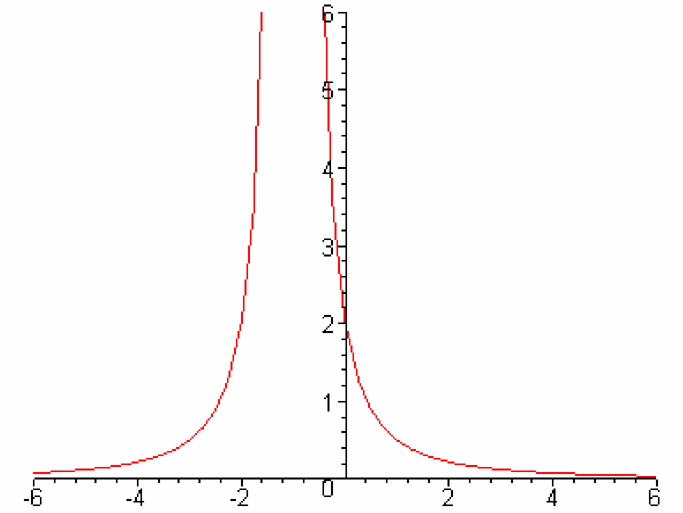
$\rightarrow$ senkrechte Asymptote bei $x_P = -1$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{2}{x^2+2x+1}\right) = \lim_{x \to +\infty}\left(\frac{x^2 \cdot (\frac{2}{x^2})}{x^2 \cdot (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$\lim_{x \to -\infty}\left(\frac{2}{(x+1)^2}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{2}{x^2+2x+1}\right) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x^2 \cdot (\frac{2}{x^2})}{x^2 \cdot (1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$\rightarrow$ waagerechte Asymptote bei $y = 0$

b)



<u>Aufgabe 4</u>

$$f(x)=\frac{x-3}{x-1}$$

a) $Z(a/b)=(1/1)$

$$f(a-x)-b=-[f(a+x)-b]\rightarrow \frac{a-x-3}{a-x-1}-b=-\left[\frac{a+x-3}{a+x-1}-b\right]\rightarrow$$

$$\frac{1-x-3}{1-x-1}-1=-\left[\frac{1+x-3}{1+x-1}-1\right]\rightarrow \frac{2+x}{x}-1=-\left[\frac{-2+x}{x}-1\right]\rightarrow \frac{2+x}{x}-1=\frac{2-x}{x}+1\rightarrow$$

$$\frac{2+x-x}{x}=\frac{2-x+x}{x}\rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{x}=\frac{2}{x}}}$$

b) Schnittpunkt mit der x-Achse: $0=x-3\rightarrow$ $\underline{\underline{S_x(3/0)}}$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $\underline{\underline{S_y(0/3)}}$

c) Polstelle: $x_P=1$

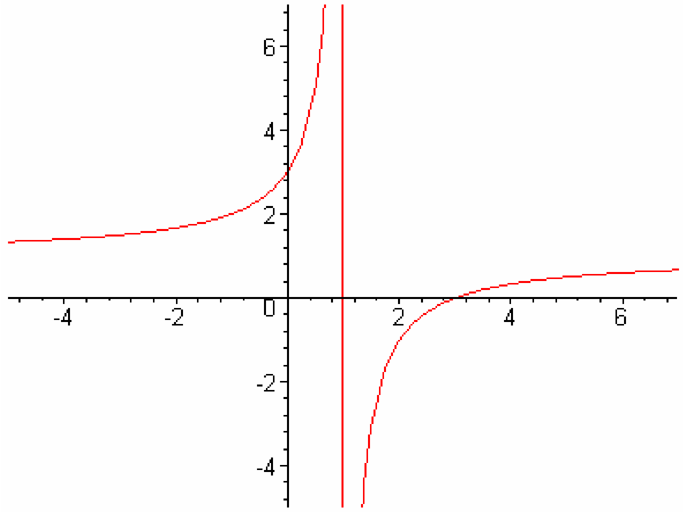
von rechts: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}-3}{1+\frac{1}{n}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)\rightarrow -\infty$$

von links: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{n}-3}{1-\frac{1}{n}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2-\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}}\right)\rightarrow +\infty$$

$\rightarrow$ senkrechte Asymptote bei $x_P=1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\cdot(1-\frac{3}{x})}{x\cdot(1-\frac{1}{x})}\right)=\underline{\underline{1}}\qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x-3}{x-1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\cdot(1-\frac{3}{x})}{x\cdot(1-\frac{1}{x})}\right)=\underline{\underline{1}}$$

d)



Zusatz

$$f(x) = \frac{x-1}{x^3-1}$$

a) Definitionslücke = Nullstelle der Funktion bei $x = 1$

b)
von rechts:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\cdot 1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2+1+\frac{1}{n}+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n}+3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

von links:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\cdot 1}{(x-1)\cdot(x^2+x+1)}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{n})^2+1-\frac{1}{n}+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}+3}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$