Mathematik-Klassenarbeit Nr. 2, Klasse 11

Thema: *Geradengleichungen und Funktionen*

1. Gegeben ist das Dreieck ABC durch **A (1|1), B (7|-2)** und **C (1|4,5)**.
   a) Zeichnen Sie das Dreieck in kartesisches Koordinatensystem (Längeneinheit 1cm) ein und ergänzen Sie die Figur anhand der folgenden Teilaufgaben.
   b) Geben Sie die Gleichung derjenigen Geraden an, die durch B und C geht.
   c) Berechnen Sie den Winkel β (=ABC)!
   d) Bestimmen Sie den Umkreismittelpunkt U und den Umkreisradius r des Dreiecks ABC!
   e) Ermitteln Sie den Abstand des Dreieckschwerpunkts S von der Ecke C!
   f) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC!
   g) Geben Sie die Gleichung der Geraden an, auf der sich der Punkt C bewegen kann, ohne dass sich der Flächeninhalt des Dreiecks ABC verändert!

2. Gegeben sind die Punkte A (-1|-2), B (5|0) und C (4|3)
   a) Berechnen Sie den Punkt D so, dass die Punkte A, B, C und D (in diesem Umlaufsinn) ein Parallelogramm bilden.
   b) Zeichnen Sie das Parallelogramm in ein Koordinatensystem und berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

3. Geben Sie an, wie eine Funktion definiert ist!

4. Gegeben sind die 3 folgenden Funktionen:

   a) $f(x) = x^3 - 8x$
   b) $g(x) = (x^3 + x^2 - 12x) / (x+4)$
   c) $h(x) = \sqrt{(9 - x^2)} / (2x^2 - 8)$

   Bestimmen Sie die maximale Definitionsmengen der Funktionen und deren Nullstellen!

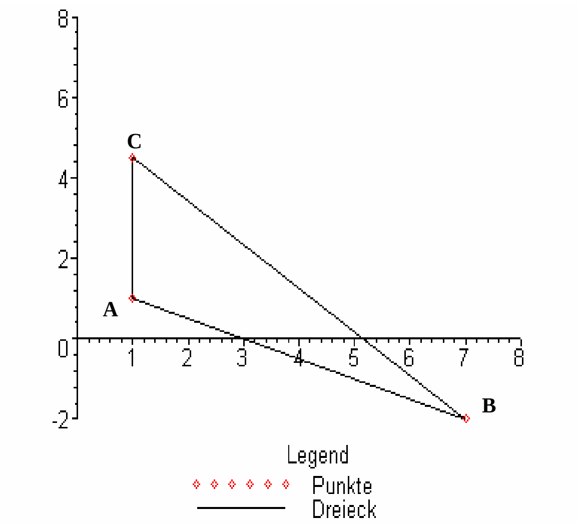
5. Gegeben ist eine lineare Funktionenschar: $f_t(x) = \frac{1}{2} t^2 x - (t^2/2)$

   a) Zeichnen Sie die Schaubilder für t = -1; t = 2 und t = 3
   b) Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Schaubilder durch einen gemeinsamen Punkt S gehen! Bestimmen Sie die Koordinaten von S!
   c) Für welches t verläuft das Schaubild durch den Punkt R (12|22)? Berechne!

Lösungsvorschlag:

Aufgabe 1

a)



b) Gerade BC

$$y - y_B = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B}(x - x_B) \rightarrow y + 2 = \frac{4{,}5 + 2}{1 - 7}(x - 7) \rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{13}{12}x + \frac{67}{12}}}$$

c) $\beta = \angle ABC$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-1}{7-1} = -\frac{1}{2} \rightarrow \tan\beta = \frac{m_{AB} - m_{BC}}{1 + m_{AB} \cdot m_{BC}} = \frac{-\frac{1}{2} - \left(-\frac{13}{12}\right)}{1 + \left(-\frac{13}{12}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{37}{24}} = \frac{14}{37}$$

$$\rightarrow \underline{\underline{\beta = 20{,}73^\circ}}$$

d) Umkreismittelpunkt (U) bestimmen: Mittelsenkrechten schneiden in U

1. Mittelpunkte der Seiten bestimmen
2. Geradengleichungen mit Mittelpunkten und senkrechten Anstiegen zu den entsprechenden Seiten aufstellen

$$M_{BC}\left(\frac{x_B + x_C}{2} / \frac{y_B + y_C}{2}\right) \rightarrow M_{BC}(4/1{,}25) \rightarrow m_{m_a} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{12}{13} \rightarrow \underline{\underline{m_a : y = \frac{12}{13}x - \frac{127}{52}}}$$

$$M_{AC}\left(\frac{x_A + x_C}{2} / \frac{y_A + y_C}{2}\right) \rightarrow M_{AC}(1/2{,}75) \rightarrow m_{m_b} = -\frac{1}{m_{AC}} = 0 \rightarrow \underline{\underline{m_b : y = 2{,}75}}$$

$$M_{AB}\left(\frac{x_A + x_B}{2} / \frac{y_A + y_B}{2}\right) \rightarrow M_{AB}(4/-0{,}5) \rightarrow m_{m_c} = -\frac{1}{m_{AB}} = 2 \rightarrow \underline{\underline{m_c : y = 2x - 8{,}5}}$$

$\rightarrow$ U ermitteln: $m_a = m_b \rightarrow \frac{12}{13}x - \frac{127}{52} = 2{,}75 \rightarrow \underline{\underline{U\left(\frac{45}{8} / 2{,}75\right)}} \rightarrow U \in m_c$

r_u = Abstand U zum Eckpunkt A, B oder C

$$s = AU = \sqrt{(x_U - x_A)^2 + (y_U - y_A)^2} = \underline{\underline{4{,}945 LE}}$$

e) Schwerpunkt (S) bestimmen: Seitenhalbierenden schneiden in S

$$S\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} / \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) \rightarrow \underline{\underline{S\left(3 / \frac{7}{6}\right)}}$$

$$s = SC = \sqrt{(x_C - x_S)^2 + (y_C - y_S)^2} = \underline{\underline{3{,}8873 LE}}$$

Seitenhalbierende ermitteln:

1. Mittelpunkte der Seiten bestimmen (Siehe d)
2. Geradengleichungen mit Mittelpunkten und Eckpunkten des Dreiecks aufstellen

$$s_a : y - y_A = \frac{y_{M_{BC}} - y_A}{x_{M_{BC}} - x_A}(x - x_A) \rightarrow \underline{s_a : y = \frac{1}{12}x + \frac{11}{12}}$$

$$s_b : y - y_B = \frac{y_{M_{AC}} - y_B}{x_{M_{AC}} - x_B}(x - x_B) \rightarrow \underline{s_b : y = -\frac{19}{24}x + \frac{85}{24}}$$

$$s_c : y - y_C = \frac{y_{M_{AB}} - y_C}{x_{M_{AB}} - x_C}(x - x_C) \rightarrow \underline{s_c : y = -\frac{5}{3}x + \frac{37}{6}}$$

S ermitteln: $s_a = s_b \rightarrow \frac{1}{12}x + \frac{11}{12} = -\frac{19}{24}x + \frac{85}{24} \rightarrow \underline{\underline{S\left(3 / \frac{7}{6}\right)}} \rightarrow S \in s_c$

f) Flächeninhalt

$$A = \frac{1}{2} | x_A \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_A - y_B) |$$

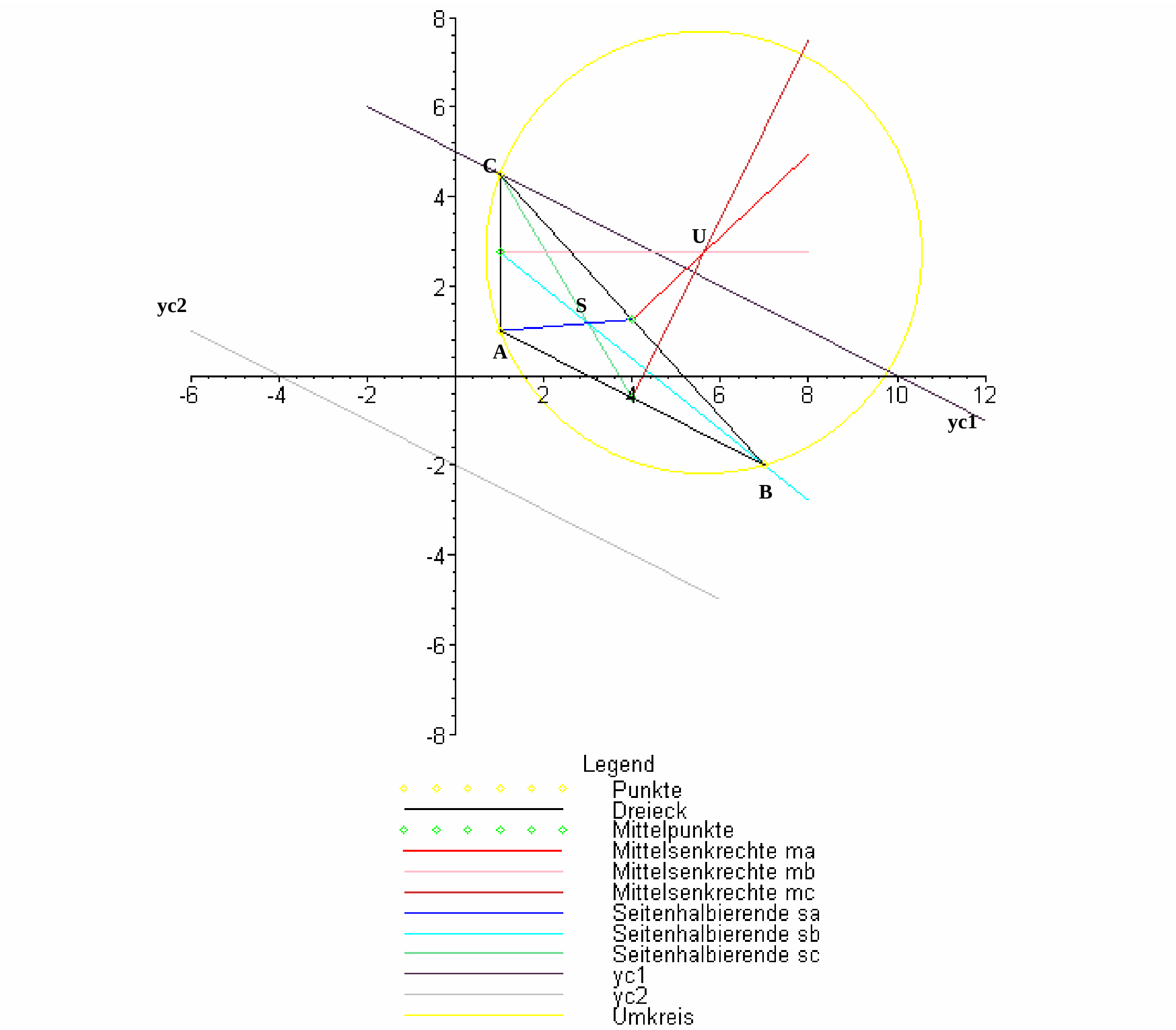
$$A = \frac{1}{2} | 1 \cdot (-2 - 4{,}5) + 7 \cdot (4{,}5 - 1) + 1 \cdot (1 + 2) | = \underline{\underline{10{,}5 FE}}$$

g) $A = \frac{1}{2} | 1 \cdot (-2 - y_C) + 7 \cdot (y_C - 1) + x_C \cdot (1 + 2) |$

$$10{,}5 FE = \frac{1}{2} | -2 - y_C + 7y_C - 7 + 3x_C |$$

$21 FE = | -9 + 6y_C + 3x_C | \rightarrow$ 2 Lösungen: $\underline{\underline{y_{C1} = -\frac{1}{2}x_{C1} + 5}}$ $\quad$ $\underline{\underline{(y_{C2} = -\frac{1}{2}x_{C2} - 2)}}$

Der Punkt muss sich auf einer parallelen Gerade zu AB befinden (wegen $A = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot h_c$), dann ändert sich die Länge der Höhe nicht! Bei der zweiten Lösung befindet sich C nicht auf einer Verschiebungslinie zum gegebenen C.



Aufgabe 2

a) $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3-0}{4-5} = -3 \rightarrow \underline{\underline{AD: y - y_A = m_{BC} \cdot (x - x_A) = -3x - 5}}$

$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0+2}{5+1} = \frac{1}{3} \rightarrow \underline{\underline{CD: y - y_C = m_{AB} \cdot (x - x_C) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}}}$

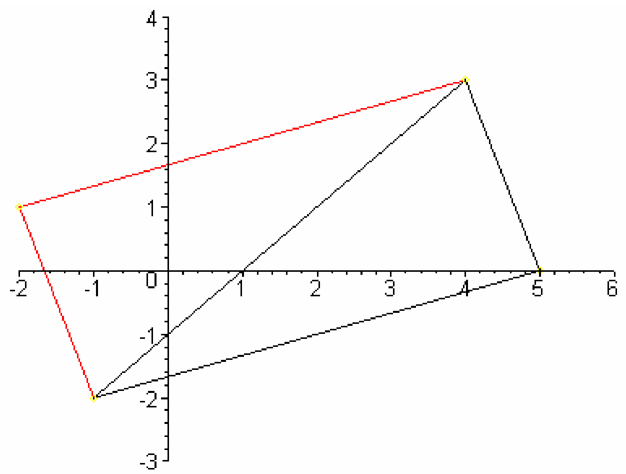
$AD = CD$

$-3x - 5 = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3} \rightarrow x = -2 \rightarrow y = 1 \rightarrow \underline{\underline{D = (-2/1)}}$

b) Flächeninhalt: $A = 2 \cdot A_{ABC}$

$A = |x_A \cdot (y_B - y_C) + x_B \cdot (y_C - y_A) + x_C \cdot (y_A - y_B)|$

$A = |-1 \cdot (0-3) + 5 \cdot (3+2) + 4 \cdot (-2-0)| = \underline{\underline{20 FE}}$



Aufgabe 3

Zu jedem $x \in \Re$ existiert genau ein $y \in \Re$.
Funktion = Vorschrift, die jeder reellen Zahl aus einer Definitionsmenge genau eine reelle Zahl zuordnet. f: x → f(x)

Aufgabe 4

a) Def.menge: $x \in \Re$

Nullstellen: $0 = x^3 - 8x \rightarrow 0 = x \cdot (x^2 - 8) \rightarrow \underline{\underline{x_{01} = 0}}$

$$0 = x^2 - 8 \rightarrow \underline{\underline{x_{02} = \sqrt{8}}}\ ,\ \underline{\underline{x_{03} = -\sqrt{8}}}$$

b) Def.menge: $x \in \Re, x \neq -4$

Nullstellen: $0 = \frac{x^3 + x^2 - 12x}{x + 4} \rightarrow 0 = x \cdot (x^2 + x - 12) \rightarrow \underline{\underline{x_{01} = 0}}$

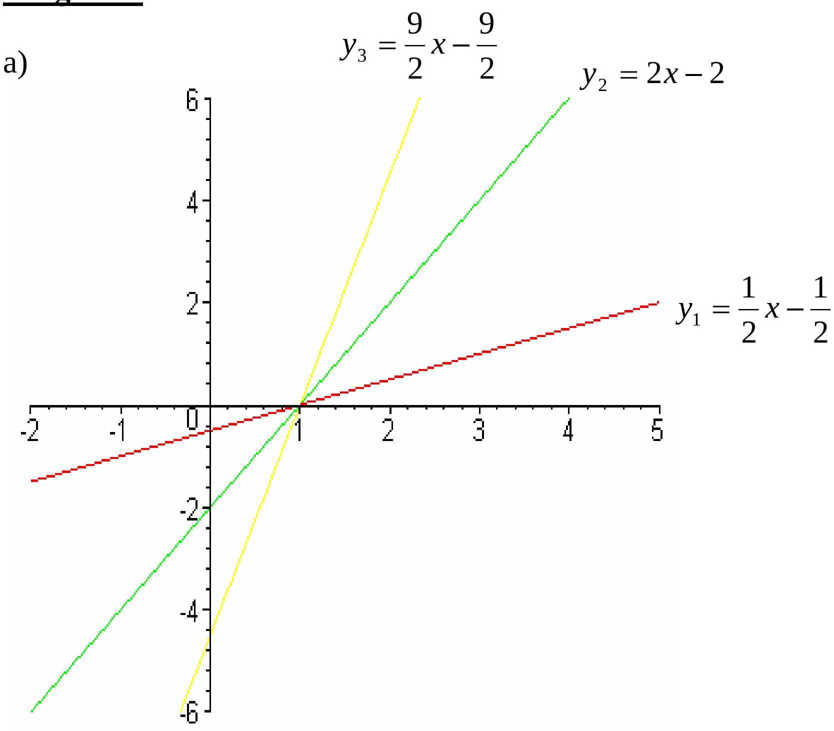
$$0 = x^2 + x - 12 \rightarrow \underline{\underline{x_{02} = 3}}\ ,\ \underline{\underline{x_{03} = -4}}$$

c) Def.menge: $x \in \Re, x \neq \pm 2$

Nullstellen: $0 = \frac{\sqrt{9 - x^2}}{2x^2 - 8} \rightarrow 0 = \sqrt{9 - x^2} \rightarrow \underline{\underline{x_{01} = 3}}\ ,\ \underline{\underline{x_{02} = -3}}$

<u>Aufgabe 5</u>

a)



b) $y_1 = y_2 \rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 2x - 2 \rightarrow x = 1,\ y = 0 \rightarrow \underline{\underline{S(1/0)}} \rightarrow y_3 \in S$

c) $22 = \frac{1}{2}t^2 \cdot 12 - \left(\frac{t^2}{2}\right) \rightarrow \underline{\underline{t_{1,2} = \pm 2}}$