Aufgabe
Stochastik – Mathe Grundkurs

Ermitteln der Wahrscheinlichkeit durch Baumdiagramm,
Additionsregel und Multiplikationsregel

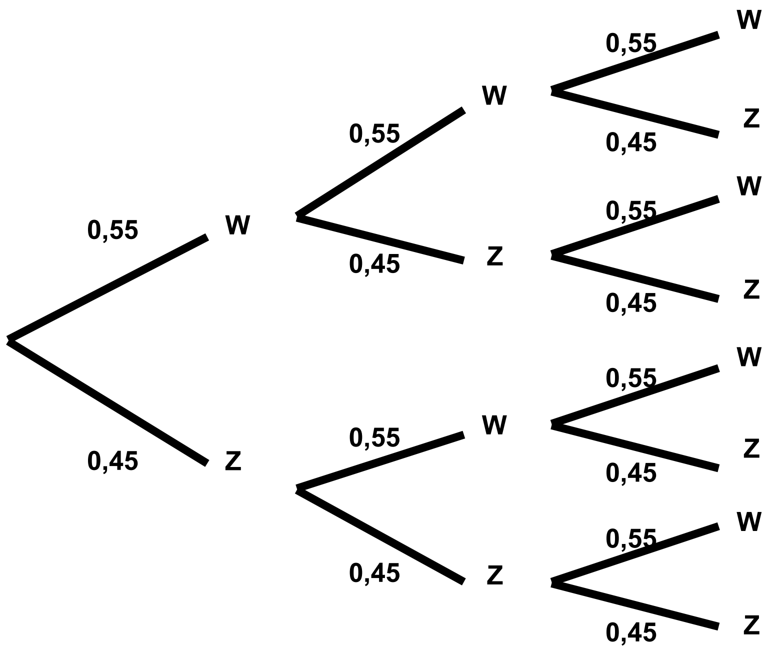
Eine stark verbogene Münze landet mit der Wahrscheinlichkeit 55% auf der Seite „Wappen“. Welche Wahrscheinlichkeit haben folgende Ereignisse beim dreimaligen Wurf? Erstelle ein Baumdiagramm und berechne. Manchmal sind verschiedene Ansätze möglich.

a) A: „drei gleiche Symbole“
b) B: „mindestens einmal Zahl“
c) C: „mindestens zweimal Zahl“
d) D: „drei gleiche Symbole oder mindestens zweimal Zahl“
e) E: „beide Symbole treten auf und mindestens zweimal Wappen“
f) F: „beide Symbole treten auf und mindestens dreimal Wappen“

Lösungen

Es handelt sich um ein dreistufiges Zufallsexperiment, bei dem es jedes Mal um die Entscheidung „Wappen“ (abgekürzt: W) oder „Zahl“ (abgekürzt: Z) geht. Die Wahrscheinlichkeiten bleiben in jedem Wurf konstant, d.h. ein entsprechendes Urnenmodell würde mit Zurücklegen der Kugeln arbeiten.

Bis zum Abschluss des Zufallsexperimentes steht insgesamt dreimal die Entscheidung für W oder Z an. Beim Aufstellen des Wahrscheinlichkeitsbaumes ist es sinnvoll, mit der Pfadmultiplikationsregel die einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten zu errechnen. Somit ergeben sich die 8 Werte für die 8 möglichen Ergebnisse (von WWW bis ZZZ) dieses Zufallsexperimentes.



$P(WWW) = 0{,}55^3 = 0{,}166$

$P(WWZ) = 0{,}55^2 \bullet 0{,}45 = 0{,}136$

$P(WZW) = 0{,}55^2 \bullet 0{,}45 = 0{,}136$

$P(WZZ) = 0{,}55 \bullet 0{,}45^2 = 0{,}111$

$P(ZWW) = 0{,}45 \bullet 0{,}55^2 = 0{,}136$

$P(ZWZ) = 0{,}55 \bullet 0{,}45^2 = 0{,}111$

$P(ZZW) = 0{,}45^2 \bullet 0{,}55 = 0{,}111$

$P(ZZZ) = 0{,}45^3 = 0{,}091$

Die Frage ist immer wieder die gleiche: Welche Ergebnis-Pfade gehören zu unserem jeweiligen Ereignis und welche Wahrscheinlichkeiten tragen sie. Übrigens: Addiert man alle Ergebniswahrscheinlichkeiten zusammen, so muss immer der Wert 1 herauskommen.

Es geht also immer der Lösungsweg: Zusammensuchen und Addieren der zugehörigen Ergebnis-Wahrscheinlichkeiten. Ich zeige hier zusätzlich auch noch einige alternative Lösungsvorschläge, die eventuell schneller sind oder auch für Aufgaben hilfreich sein können, bei denen der Baum noch größer ist, z.B. beim zehnfachen Münzwurf.

Lösung zu a)

Zum Ereignis A gehört der oberste und unterste Pfad des Baumes. Also wird gerechnet:

$$P(A) = P(WWW) + P(ZZZ) = 0{,}166 + 0{,}091 = 0{,}257$$

Lösung zu Aufgabe b)

„Mindestens einmal“ ist das Gegenereignis zu „kein Mal“. Man könnte jetzt also entweder die sieben Ergebnis-Wahrscheinlichkeiten von
WWZ bis ZZZ aufaddieren. Oder man rechnet besser gleich mit dem Satz von der Gegenwahrscheinlichkeit.

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(WWW) = 1 - 0{,}166 = 0{,}834$$

Eventuell hast du mit dem erstgenannten Ansatz 0,832 rausbekommen. Dies im Rahmen von Rundungstoleranzen okay.

Lösung zu Aufgabe c)

„Mindestens zweimal Zahl“ beschreibt alle Ergebnisse, in denen Z wenigstens zweimal vertreten ist. Lösung durch systematisches Absuchen des Baumes:

$$P(C) = P(WZZ) + P(ZWZ) + P(ZZW) + P(ZZZ)$$

$$= 0{,}111 + 0{,}111 + 0{,}111 + +0{,}091 = 0{,}424$$

Wer schon weiß, dass die Reihenfolge der Elementarereignisse für die Wahrscheinlichkeit des Ergebnisses keine Rolle spielt, der rechnet schneller:

$$P(C) = P(\text{genau zweimal } Z) + P(\text{genau dreimal } Z) = 3 \bullet 0{,}111 + 0.091 = 0{,}424$$

Diese Überlegungen spielen übrigens im Rahmen der Bernoulli-Experimente eine große Rolle.

Die Rechnung anhand des Gegenereignisses $\overline{C}$, beschreibar mit: „höchstens einmal Zahl“ oder auch „mindestens zweimal Wappen“, bringt hier keine Vereinfachung der Rechnung, daher zeige ich sie nicht.

Lösung zu Aufgabe d)

Es handelt sich um die ODER-Verknüpfung der Ereignisse A und C. Mathematisch:

$D = A \cup C$

Natürlich kann man wieder den gesamten Baum nach passenden Ergebnissen absuchen, die entweder A oder C erfüllen. Hierfür empfehle ich, erst einmal nach dem einfacheren A:„drei gleiche“ zu suchen. Beim Markieren aller zu einem bestimmten Ereignis zugehörigen Fälle haben sich übrigens farbige Stifte bestens bewährt. Nachdem man also den obersten (WWW) und untersten Fall (ZZZ) im Baum markiert hat, geht man die noch nicht markierten systematisch daraufhin durch, ob sie der Formulierung C: „mindestens zweimal Zahl“ entsprechen. Es kommen dann noch die drei bei c) genannten, gleichwahrscheinlichen Fälle hinzu.

$$P(D) = P(WWW) + P(WZZ) + P(ZWZ) + P(ZZW) + P(ZZZ)$$

$$= 0{,}166 + 3 \bullet 0{,}111 + 0{,}091 = 0{,}59$$

Angesichts der Tatsache, dass wir A und C schon gelöst haben, bietet sich der Additionssatz (auch genannt: Summenregel) an. Dieser lautet in der Formelsammlung:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) – P(A \cap B)$

Hierfür müssen allerdings im Rahmen einer Nebenrechnung zunächst die gemeinsamen Ergebnisse mit ihren zugehörigen Wahrscheinlichkeiten festgestellt werden, um die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cap C$ zu bestimmen.

$$P(A \cap C) = P(ZZZ) = 0{,}091$$

Dann ergibt sich:

$$P(D) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = 0{,}257 + 0{,}424 - 0{,}091 = 0{,}59$$

Lösung zu Aufgabe e)

Hierfür empfehle ich, sich zunächst das erste der mit UND-verknüpften Ereignisse zu überlegen und dann systematisch alle wieder auszuschließen, die im zweiten Teil der Aussage nicht vorkommen.

Zum ersten Ereignis, nennen wir es E_1: „beide Symbole treten auf“, gehören alle Ergebnisse, die nicht bei A genannt wurden, also das zweite bis siebente im Baum. Diese geht man nun von oben nach unten durch und fragt sich bei jedem, ob es gleichzeitig das Ereignis E_2: „mindestens zweimal Wappen“ erfüllt. Dann zählt man am Ende die drei Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse WWZ, WZW und ZWW zusammen:

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2) = P(WWZ) + P(WZW) + P(ZWW)$$

$$= 0{,}136 + 0{,}136 + 0{,}136 = 0{,}408$$

Vielleicht ist dir aufgefallen, dass hinter der verbalen Formulierung „beide Symbole und mindestens zweimal Wappen“ bei einem dreistufigen Experiment die Aussage: „genau zweimal Wappen“ steckt. Dann wäre die Lösung etwas einfacher gewesen, man rechnet dann mit drei gleichwahrscheinlichen Fällen:

$$P(E) = P(\text{genau zweimal Wappen}) = 3 \bullet 0{,}136 = 0{,}408$$

Lösung zu Aufgabe f)

Bei Aufgabe F sollte dir früher oder später auffallen, dass es sich bei den Teil-Ereignissen um widersprüchliche Ereignisse handelt. Das bedeutet: Es gibt kein Ergebnis unter den acht, welches beiden Ansprüchen genügt. Anders gesagt: Es gelingt beim dreimaligen Münzwurf in keinem Fall, sowohl beide Symbole auftreten zu lassen als auch mindestens dreimal Wappen (mehr als 3 geht hier ohnehin nicht). Es handelt sich also um das sogenannte „unmögliche“ oder „unerfüllbare“ Ereignis, welches mit dem Zeichen für die leere Menge { } oder ∅ gekennzeichnet wird.

F=„beide Symbole“ ∩ „mindestens dreimal Wappen“ = { }

Per Definition gilt dann:

$P(F) = 0$