# Vorabiturklausur:
# Analysis; Analytische Geometrie und Lineare Algebra und Stochastik

1. Gegeben ist die Funktionsschar $f_a$ durch $f_a(x) = \frac{1}{8}x^4 - ax^3 + \frac{27}{8}, x, a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

Ihre Graphen in einem kartesischen Koordinatensystem seien mit $G_a$ bezeichnet.

a) Berechne Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen $G_a$.

   Ermitteln Sie die Werte des Parameters a für den Fall, dass die Funktionen der Funktionsschar $f_a$ genau eine Nullstelle haben.

   Zeichne den Graphen $G_{0,6}$ im Intervall $-2 \leq x \leq 5$.

b) Zeigen Sie, dass alle Graphen Ga genau eine gemeinsame Wendetangente t haben, die parallel zur x-Achse verläuft.

   Geben Sie eine Gleichung für diese Tangente an.

   Der Graphen $G_{0,6}$ und die Wendetangente t begrenzen eine Fläche vollständig. Bei Rotation dieser Fläche um die Wendetangente t entsteht ein Körper.

   Berechnen Sie die Maßzahl des Volumen dieses Körpers auf eine Dezimalstelle genau.

c) Im Intervall $-2 \leq x \leq 5$ beschreibt der Graph G0,6 nun einen möglichen Flusslauf. Zwei einander kreuzende Wanderwege führen entlang der Koordinatenachsen (Breiten bleiben unberücksichtigt). Um Wanderern eine Orientierung zu geben, will man die kürzeste Entfernung entlang der Wanderwege von deren Kreuzung bis zum Flusslauf ausschildern.

   Berechnen Sie gegebenenfalls unter Verwendung eines Näherungsverfahren diese Entfernung mit einer Genauigkeit von 10 m. (Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht 100 m im Gelände.)

2. Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Menge der Geraden

$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1-a \\ a \end{pmatrix}, a, t \in \mathbb{R}$ und die Menge der Ebenen $E_b: -x + 2y + bz - 1 - b = 0, b \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden $g_1$ und $g_{-1}$ eine Ebene E bestimmen.
Geben Sie eine Koordinatengleichung der Ebene an. [Kontrolle: -x+2y+2z=3]

Zeigen Sie, dass alle Geraden $g_a$ in der Ebene E liegen.

b) Die Ebene E (aus Aufgabe a)) wird von den Koordinatenachsen jeweils in den Punkten $P_1$, $P_2$ bzw. $P_3$ durchstoßen. Die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und der Koordinatenursprung O bilden die Pyramide $P_1P_2P_3O$.

Berechne Sie die Maßzahl des Volumens der Pyramide $P_1P_2P_3O$, den Abstand des Koordinatenursprungs von der Ebene E und die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks $P_1P_2P_3$.

Durch die Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ und O geht eine Kugel K. Ermitteln Sie eine Gleichung der Kugel K. Weisen Sie nach, dass der Mittelpunkt der Kugel K außerhalb der Pyramide $P_1P_2P_3O$ liegt.

c) Untern den Ebenen $E_b$ gibt es genau zwei Ebenen, die mit der Ebene $E_0$ einen Winkel von 60° einschließen. Berechnen Sie für diesen Fall die Werte des Parameters b.

3. Bei der Herstellung von gefärbten Gummibällen treten Farb- und Materialfehler unabhängig voneinander auf. Farbfehler treten bei 2% der hergestellten Menge auf. Nur 90% der produzierten Bälle sind fehlerfrei. Alle produzierten Bälle werden in Kartons zu je 10 Stück verpackt und an Warenhäuser versandt.

a) Berechne Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton höchstens ein Ball fehlerhaft ist.

b) In einem Karton befinden sich zwei fehlerhafte Bälle. Eine Verkäuferin entnimmt diesem Karton zufällig drei Bälle ohne Zurücklegen. Berechne Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie dabei höchstens einen fehlerhaften Ball entnimmt.

c) Berechne Sie, wie viele Kartons das Warenhaus mindestens bestellen sollte, damit spätestens der n-te Karton mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% nur fehlerfreie Bälle enthält.

d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Ball genau einen der beiden beschriebenen Fehler hat.

e) Ein Warenhaus wird von zwei verschiedenen Herstellern beliefert. Die Lieferung von Hersteller 1 enthält 10% fehlerhafte Bälle, die von Hersteller 2 enthält 9% fehlerhafte Bälle. Insgesamt stammen ein Drittel aller fehlerhaften Bälle von Hersteller 1.

Welchen Anteil aller Bälle bezieht das Warenhaus vom Hersteller 1?

*Lösungen:*

1.

$a)\ f_a(x)=\frac{1}{8}x^4-ax^3+\frac{27}{8};\ f_a'(x)=\frac{1}{2}x^3-3ax^2;\ f_a''(x)=\frac{3}{2}x^2-6ax;\ f_a'''(x)=3x-6a$

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f_a'(x)=0$

$0=\frac{1}{2}x^3-3ax^2=x^2(\frac{1}{2}x-3a)$ Ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird.

$x^2=0\vee\frac{1}{2}x-3a=0$

$x_1=0\vee x_2=6a$ Dies sind mögliche Extremstellen.

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Extrema: $f_a'(x)=0\wedge f_a''(x)\neq 0$:

$f_a''(0)=0$ Das Kriterium versagt hier. Vielleicht gibt es ein Extrempunkt. Spätere Untersuchung auf Wendepunkte gibt weiteren Aufschluss.

$f_a''(6a)=\frac{3}{2}\bullet 36a^2-6a\bullet 6a=54a^2-36a^2=18a^2>0,$ da $a>0$. Minimum

An der Stelle $x=6a$ liegt also tatsächlich ein Extrepunkt vor, da hinreichenden Bedingung erfüllt ist. Berechnung des Tiefpunktes durch Einsetzen von $x=6a$ in die Funktion:

$f_a(6a)=\frac{1}{8}\bullet(6a)^4-a\bullet(6a)^3+\frac{27}{8}=\frac{1}{8}\bullet 1296a^4-216a^4+\frac{27}{8}=162a^4-216a^4+\frac{27}{8}$

$=-54a^4+\frac{27}{8}$

Der Tiefpunkt liegt damit bei $T(6a;-54a^4+\frac{27}{8})$.

Berechnung der Wendepunkte:

Notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes: $f_a''(x) = 0$

$0 = \frac{3}{2}x^2 - 6ax = x(\frac{3}{2}x - 6a)$Ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird.

$x = 0 \vee \frac{3}{2}x - 6a$

$x_1 = 0 \vee x_2 = 4a$ Dies sind mögliche Wendestellen.

Hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes: $f_a''(x) = 0 \wedge f_a'''(x) \neq 0$:

$f_a'''(0) = -6a,$ da $a > 0$ folgt $-6a \neq 0$

Im Zusammenhang mit der Untersuchung auf Extrema hatte sich auch ergeben $f_a'(0) = 0$

Somit liegt bei $x = 0$ ein Sattelpunkt vor.

$f_a'''(4a) = 12a - 6a = 6a,$ da $a > 0$ folgt $6a \neq 0$

Berechnung der Wendepunkte:

$f_a(0) = \frac{27}{8}$

$f_a(4a) = \frac{1}{8} \bullet (4a)^4 - a \bullet (4a)^3 + \frac{27}{8} = 32a^4 - 64a^4 + \frac{27}{8} = -32a^4 + \frac{27}{8}$

Die Wendepunkte liegen damit bei $W_1(0;\frac{27}{8})$ und $W_2(4a;-32a^4 + \frac{27}{8})$.

Im Zusammenhang mit der Untersuchung auf Extrema hatte sich auch ergeben $f_a'(0) = 0$.

Somit liegt bei $x = 0$ ein Sattelpunkt vor.

Da die vorausgegangene Berechnung gezeigt hat, dass alle Graphen der Funktionsschar nur einen Tiefpunkt und keinen weiteren Hochpunkt beistzen, haben die Funktionen der Schar nur genau dann genau eine Nullstelle, wenn der Tiefpunkt auf der $x - Achse$ liegt.

Damit folgt:

$0 = -54a^4 + \frac{27}{8}$

$-\frac{27}{8} = -54a^4 \Leftrightarrow a^4 = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a_{1,2} = +-\frac{1}{2}$

Für $a = +-0,5$ haben die Funktionen der Schar genau eine Nullstelle.

$b)$ Nach Aufgabe $1a)$ haben alle GRaphen der Funktionsschar einen gemeinsamen Wendepunkt $W(0;\frac{27}{8})$, da dieser von a unabhängig ist. Da $f_a\,'(0)=0$, wie in Aufgabe $1a)$ berechnet, verläuft diese Wendetangte parellel zur $x-Achse.$
Nun muss noch der zweite Wendepunkt überprüfen werden, da man zeigen soll, dass alle Graphen genau eine Wendetangente besitzen. Mit $W(4a;-32a^4+\frac{27}{8})$ folgt:

$f_a\,'(4a)=\frac{1}{2}(4a)^3-3a(4a)^2=32a^3-48a^3=-16a^3$ , da $a>0$, kann dies nie 0 werden und ist somit nicht parallel zur $x-Achse.$

Also ist $y=\frac{27}{8}$ die einzige und gemeinsame Wendetangte aller Graphen der Funktionsschar.

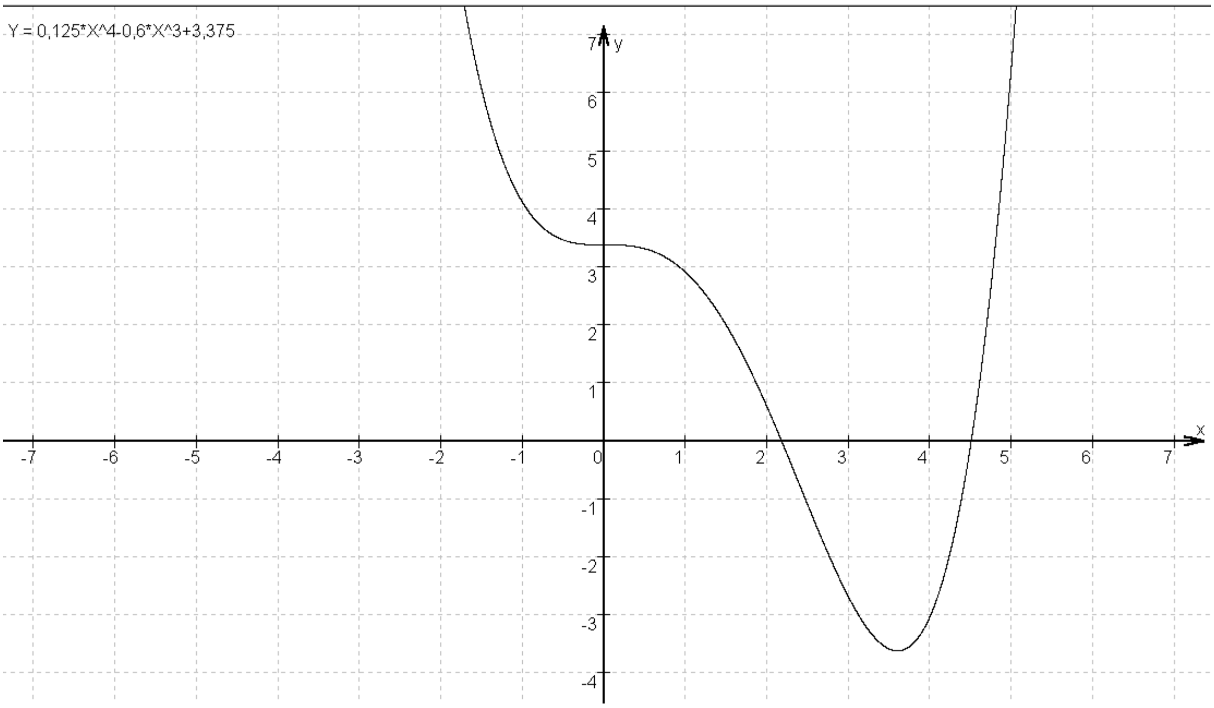



**Abb. 1** Graph der Funktion $f_{0,6}$.

$G_{0,6}: f_{0,6}(x) = \frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3 + \frac{27}{8}; t(x) = \frac{27}{8}$

Zunächst müssen die Schnittpunkt der beiden Graphen berechnet werden.

Dies erfolgt durch Gleichsetzen der beiden Funktionen:

$\frac{27}{8} = \frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3 + \frac{27}{8}$

$0 = \frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3 = x^3(\frac{1}{8}x - 0,6)$ Ein Produkt wird 0, wenn einer der Faktoren 0 wird:

$x^3 = 0 \vee \frac{1}{8}x - 0,6 = 0$

$x_1 = 0 \vee x_2 = 4,8$

Zur Berechnung des Rotationsvolumens wende ich die Formel $V = \pi \bullet \int_a^b f(x)^2 dx$ an.

Verschiebe den Graphen nach unten, da die Formel nur die Rotation um die $x-Achse$ verwendet werden kann. Da das angegebenen Flächenstück um eine Parallele zur $x-Achse$ rotiert, muss zur Berechnung der Maßzahl des gescuhten Volumens das entsprechende Flächenstück um $\frac{27}{8}$ in negativer Richtung nach unten verschoben werden.

Damit gilt:

$$V = \pi \bullet \int_0^{4,8} (\frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3 + \frac{27}{8} - \frac{27}{8})^2 dx = \pi \bullet \int_0^{4,8} (\frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3)^2 dx = \pi \bullet \int_0^{4,8} (\frac{1}{64}x^8 - \frac{3}{20}x^7 + 0,36x^6)dx = ...$$

$$= \pi \bullet [\frac{1}{576}x^9 - \frac{3}{160}x^8 + \frac{9}{175}x^7]_0^{4,8} = ... = 263,49VE.$$

Das Volumen des Rotationskörpers beträgt ungefähr $263,49VE$.

$c$) Die Entfernung entlang der $y-Achse$ wurde bereits in $1a$) berechnet.

Sie beträgt $\frac{27}{8} = 3,375$ Einheiten, also 337,5 Meter im Gelände.

Berechnung der Nullstelle des Graphen, um den Weg auf der $x-Achse$ angeben zu können.

$0 = \frac{1}{8}x^4 - 0,6x^3 + \frac{27}{8}$ Dies kann mit unserem herkömmlichen Mittel nicht gelöst werden, wende daher das Newton-Verfahren zur Berechnung der Nullstelle an. Die Formel lautet

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Als Startmittel (mittels TABLE) wähle ich $x_0 = 2$.

| **n** | **$x_n$** | **$f(x_n)$** | **$f'(x_n)$** | **$x_{n+1}$** |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 0,575 | -3,2 | 2,1796875 |
| 1 | 2,1796875 | -0,016921576 | -3,373979049 | 2,174672183 |

Da sich die zweite Nachkommastelle nicht mehr ändert, breche ich die Untersuchung an dieser Stelle ab, da die 2. Dezimalstelle schon genau angegeben werden kann. Die Strecke beträgt 220 Meter im Gelände.

2.

$$a)g_a:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1-a\\a\end{pmatrix}$$

Die beiden Geraden lautet folglich: $g_1:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $g_{-1}:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

Die beiden Geraden besitzen denselben Stützvektor, außerdem sind

die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear unabhängig, da $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\neq r\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Damit ist gezeigt, dass die beiden Geraden eine Ebene aufspannen, da sie einen gemeinsamen Punkt $P(1;1;1)$ und zwei linear unabhängige Vektoren besitzen.

Damit lautet die von den beiden Geraden aufgespannte Ebene

$\varepsilon:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Überführe diese Parameterform der Ebene in Normalenform.

Das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren ergibt den Normalenvektor der Ebene.

Mit $\vec{x}\bullet\vec{n}=\overrightarrow{x_0}\bullet\vec{n}$ folgt:

$\vec{n}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-2\\2+2\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ Die Normalenform lautet also:

$$\vec{x}\bullet\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}=3$$

$-x+2y+2z=3$ ist die Koordinatenform der Ebene.

Nachweis, dass alle Geraden in der Ebene liegen, erfolgt durch Einsetzen der Geradenschar in die Ebene. Erhalte ich wahre Aussage, ist gezeigt, dass alle Geraden der Geradenschar in der Ebene liegen.

$-1-2t+2(1+t(1-a))+2(1+at)=3$

$-1-2t+2+2t-2at+2+2at=3$

$3=3$

$0=0$ wahre Aussage

Damit ist gezeigt, dass alle Geraden der Geradenschar in der Ebene liegen.

$b$) Berechnung der Durchstoßpunkte der Ebene durch jeweiliges Nullsetzen von den entsprechenden Koordinaten.

$P_1(-3;0;0); P_2(0;1,5;0); P_3(0;0;1,5)$

Berechnung des Abstand von der Ebene zum Nullpunkt erfolgt durch Hesseform $\vec{x} \bullet \overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{x_0} \bullet \overrightarrow{e_n}$.

Das absolute Glied gibt dann den Abstand der Ebene vom Nullpunkt an.

Nebenrechnungen:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}; |\vec{n}| = \sqrt{9} = 3; \overrightarrow{e_n} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ Die Hesseform lautet damit:

$\vec{x} \bullet \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \bullet \frac{1}{3} = 1$ Der Abstand der Ebene vom Ursprung beträgt daher $1LE$.

Dies ist gleichzeitig eine Höhe der Pyramide.

Nun muss der Flächeninhalt des Dreiecks berechnet werden. Dafür haben wir zwei Möglichkeiten. Einmal könnten wir eine Grundseite wählen und dann den Abstand eines dritten Punktes auf diese Gerade berechnen oder wir argumentieren über das Kreuzprodukt, denn der halbe Betrag des Kreuzprodukt ist der gesuchten Flächeninhalt. Es gilt also:

$A = \frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}|$.

Nebenrechnungen:

$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ Einsetzen liefert:

$$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1,5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2,25-0 \\ 0-4,5 \\ 0-4,5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2,25 \\ -4,5 \\ -4,5 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{2,25^2 + (-4,5)^2 + (-4,5)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{16} + \frac{81}{4} + \frac{81}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{81}{16} + \frac{324}{16} + \frac{324}{16}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{729}{16}}FE = 3,375FE$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt daher $3,375FE$.

Mit $V = \frac{1}{3}Gh$ folgt folgendes Volumen für die Pyramide.

$V = \frac{1}{3} \bullet 3,375 \bullet 1 = 1,125VE$.

Das Volumen der Pyramide beträgt daher $1,125VE$.

Das Volumen der Pyramide lässt sich noch mit dem Spatprodukt berechnen $V = \frac{1}{6}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Mit der Formel für das Volumen der Pyramide lässt sich ganz einfach die Grundfläche berechnen.

Kugelgleichung aufstellen:

Da $P \in K: (-3-x_m)^2 + y_m{}^2 + z_m{}^2 = r^2$

Da $P_2 \in K: x_m{}^2 + (1{,}5 - y_m)^2 + z_m{}^2 = r^2$

Da $P_2 \in K: x_m{}^2 + y_m{}^2 + (1{,}5 - z_m)^2 = r^2$

Da $0 \in K: x_m{}^2 + y_m{}^2 + z_m{}^2 = r^2$

Dieses LGS kann wie folgt gelöst werden:

$I. + (-1)IV: 9 + 6x_m = 0 \Leftrightarrow x_m = -\frac{3}{2}$

$II. + (-1)IV: 2{,}25 - 3y_m = 0 \Leftrightarrow y_m = \frac{3}{4}$

$III. + (-1)IV: 2{,}25 - 3z_m = 0 \Leftrightarrow z_m = \frac{3}{4}$

Radius berechnt sich durch Einsetzen der berechneten Werte in $IV.$:

$\frac{9}{4} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = r^2 \Leftrightarrow \frac{54}{16} = r^2 \Leftrightarrow r^2 = 3{,}375$

Der Mittelpunkt der Kugel lautet also $M(-\frac{3}{2}; \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ und der Radius $r = \sqrt{3{,}375}.$

Die Kugelgleichung lautet also:

$$(\vec{x} - \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix})^2 = 3{,}375. \Leftrightarrow (\vec{x} - \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}75 \\ 0{,}75 \end{pmatrix})^2 = 3{,}375$$

Der Mittelpunkt der Kugel liegt außerhalb der Pyramide, wenn sein Abstand zum Ursprung größer ist als der Abstand $d$ von der Ebene zum Ursprung ($1LE$). Da $|\overrightarrow{0M}| = \sqrt{3{,}375} > 1$, liegt der Kugelmittelpunkt außerhalb der Pyramide.

$c)\ E_b: -x+2y+bz-1-b=0$

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen berechnet sich über

$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}\right|$. Mit $\alpha = 60°$ folgt $\cos 60° = \frac{1}{2}$.

$\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$

Nebenrechnungen:

$\overrightarrow{n_1}\bullet\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix} = 5; |\overrightarrow{n_1}| = \sqrt{5}; |\overrightarrow{n_2}| = \sqrt{5+b^2}$

Einsetzen liefert:

$\frac{1}{2} = \left|\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{5+b^2}}\right| = \left|\frac{5}{\sqrt{25+5b^2}}\right|$ Da der Term in den Betragsstrichen nicht negativ werden kann, können die Betragsstriche ohne Fallunterscheidung weggelassen werden:

$\frac{1}{2} = \frac{5}{\sqrt{25+5b^2}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{25+5b^2} = 5 \Leftrightarrow \frac{1}{4}(25+5b^2) = 25 \Leftrightarrow 25+5b^2 = 100 \Leftrightarrow 5b^2 = 75$

$\Leftrightarrow b^2 = 15 \Leftrightarrow b = +-\sqrt{15}$

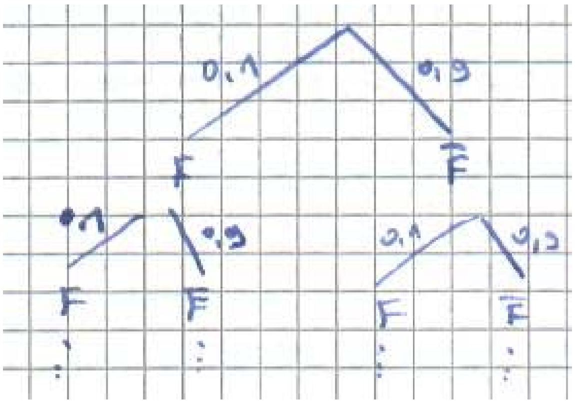
Die beiden Ebenen $E_{\sqrt{15}} = -x+2y+\sqrt{15}z = 1+\sqrt{15}$ und $E_{-\sqrt{15}} = -x+2y-\sqrt{15}z = 1-\sqrt{15}$ schließen mit der Ebene $E_0$ einen Winkel von 60° ein.

3.

$a$) Definiere folgende Ereignisse:

$F$ : "Der Ball ist fehlerhaft."

Damit ergibt sich folgendes Baumdiagramm:




Dieses Baumdiagramm setzt sich über 10 Stufen entsprechend fort.

Es gilt:

$P$("Höchstens ein Bail im Karton ist fehlerhaft") = $P$("Kein Ball ist fehlerhaft")

$+P$("Genau ein Ball ist fehlerhaft")

$= 0,9^{10} + 10 \bullet 0,1^{1} + 0,9^{9} = 0,73609$

Alternativ kann über die Bionomialverteilung argumentiert werden.

Die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Ball im Karton defekt ist, beträgt also ungefähr $73,6\%$.

$b$) Es handelt sich hier um ein Laplace-Experiment, da alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind, jeder Ball kann mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gezogen werden. Es handelt sich außerdem um eine hypergeometrische Verteilung, also um Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge.

Definiere folgende Ereignisse:

$E$ : "Höchstes ein Ball ist defekt."

$$P(E) = \frac{\binom{2}{0}\binom{8}{3}* + \binom{2}{1}\binom{8}{2}**}{\binom{10}{3}***} = \frac{112}{120} = 93,3$$

* Kein Ball ist defekt, wir ziehen 0 aus den 2 defekten und die übrigen 3 aus den restlichen 8 Bällen

** Ein Ball ist defekt, wir ziehen 1 aus den 2 defekten und die übrigen 2 aus den restlichen 8 Bällen

*** Insgesamt ziehen wir 3 Bälle aus 10 Bällen.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $93,3\%$ ist höchstens ein Ball defekt.

$c$) Es handelt sich um eine Entkleidung der "Drei-Mindestens-Aufgabe":

$P$("1 Karton Bälle ist fehlerfrei") $= 0,9^{10}$

Die Wahrscheinlichkeit des Gegeneregnisses lautet:

$P$("Mindestens ein Ball im Karton ist fehlerhaft") $= 1 - 0,9^{10}$

Mit dem Ansatz der "Drei-Mindestens-Aufgabe" folgt:

$1-(1-0,9^{10})^n \geq 0,9$

$(1-0,9^{10})^n \leq 0,1 \Leftrightarrow n \lg(1-0,9^{10})^n \leq \lg 0,1 \Leftrightarrow n \geq 5,36$

Das Warenahsu muss also mindestens 6 Kartons bestellen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% nur fehlerfreie Bälle in einem Karton zu erhalten.

$d$) Definiere folgende Ereignisse:

$F$ :"Farbfehler tritt auf."

$M$ :"Materialfehler tritt auf"

Folgende Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:

$P(F) = 0,02; P(F \cup M) = 0,1$, da 90% aller Bälle fehlerfrei sind.

Nach dem Additionssatz bzw. nach der Formel von Sylvester gilt:

$P(F \cup M) = P(M) + P(F) - P(F \cap M)$

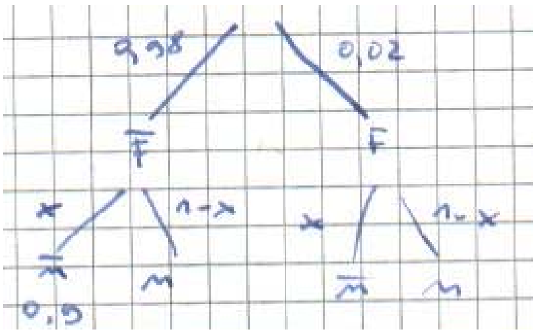
Wegen der Unabhängigkeit gilt: $P(F \cap M) = P(F) \bullet P(M)$

$\rightarrow ,1 = 0,02 + P(M) - 0,02 \bullet P(M)$, also $P(M)(1-0,02) = 0,08 \Rightarrow P(M) = 0,0816$

Weiterhin gilt: $P(F \cap \overline{M}) + P(M \cap \overline{F}) = P(F) \bullet P(\overline{M}) + P(M) \bullet P(\overline{F})$

Einsetzen liefert: $0,02(1-0,0816) + 0,98 \bullet 0,0816 = 0,0983$

Andere Möglichkeit mit Hilfe des Baumdiagramms:



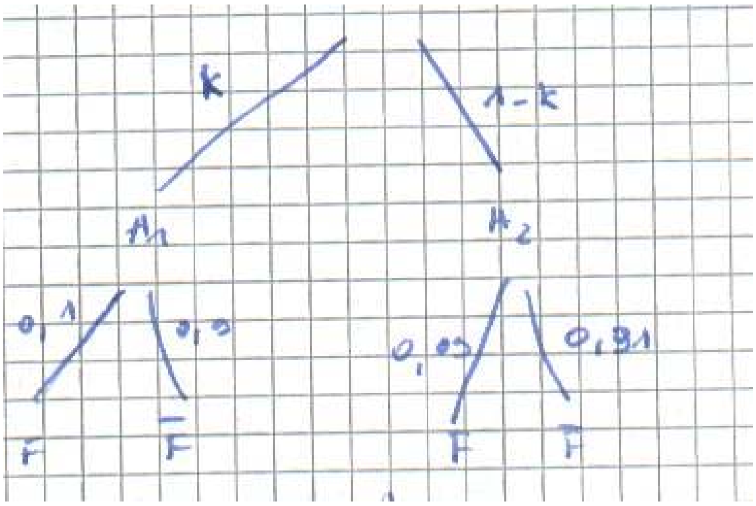
$e$) Definiere folgende Ereignisse:

$H_1$ : "Ball stammt von Hersteller 1"

$H_2$ : "Ball stammt von Hersteller 2"

$F$ : "Ball ist fehlerhaft"

Folgendes Baumdiagramm lässt sich aufstellen:




Weiterhin gilt: $P_F(H_1) = \dfrac{1}{3}$

Mit Hilfe des Satzes von Bayes für $n = 2$ folgt:

$$\frac{1}{3} = P_F(H_1) = \frac{P(H_1) \bullet P_{H_1}(F)}{P(H_1) \bullet P_{H_1}(F) + P(H_2) \bullet P_{H_2}(F)}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{0,1k}{0,1k + (1-k) \bullet 0,09} = \frac{0,1k}{0,1k + 0,09 - 0,09k} = \frac{0,1k}{0,01k + 0,09}$$

$$k = \frac{9}{29} = 0,3103; 1-k = 1 - \frac{9}{29} = 0,7897$$

31% stammen also von Herrstellen 1 und 79% von Hersteller 2.