Mathe LK Klausur
Analytische Geometrie und Lineare Algebra I

1.

a) Untersuche die gegenseitige Lage der Geraden g und h und ermittle gegebenenfalls das Schnittgebilde.

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix};h:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

b) Gegeben ist die Ebene $\varepsilon:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme die Werte von a und b in $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ so, dass gilt:

i) Die Gerade g liegt in der Ebene ε.
ii) Die Gerade g ist parallel zur Ebene ε.
iii) Die Gerade g schneidet die Ebene ε in einem Punkt.

c) Stelle die in Aufgabe 1b) gegebene Ebene ε in einem Koordinatensystem dar.

d) Bestimme eine Parametergleichung der Ebene $2x-3y+z=6$.

2.

Gegeben sind die Gerade $g:\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und die Ebene

$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $t,s,r\in\mathbb{R}$.

a) Die Ebene schneidet die x-Achse in A und die y-Achse in B. Sie schneidet außerdem die Gerade g in C. Berechne die Koordinaten von A, B und C. Bestimme die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist mit $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

b) M_1 ist der Mittelpunkt von $\overline{AB}$, M_2 oder Mittelpunkt von $\overline{AD}$ und S ist der Schwerpunkt des Dreiecks AM_1M_2 . Berechne die Koordinaten von S.
Zeige, dass S auf der Diagonalen AC des Parallelogramms ABCD liegt.

c) Der Punkt A* geht aus A durch eine Punktspiegelung an C hervor. Berechne die Koordinaten von A*.

3.
In einem kartesischen (rechtwinkligen) Koordinatensystem sind für jedes $t \in \mathbb{R}$ die Punkte $A_t(-t;-8;-1)$, $B_t(4;-4;2t)$ und $C(0;-8;4)$ gegeben.
Die Ebene E_t geht durch die Punkte A_t, B_t und C.

a) Weise nach, dass die Vektoren $\overrightarrow{CA_t}$ und $\overrightarrow{CB_t}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$ linear unabhängig sind.
Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\overrightarrow{CA_t}$, $\overrightarrow{CB_t}$ und $\overrightarrow{OC}$ linear abhängig?

b) Ermittle für E_t eine Parameterdarstellung und eine Ebenegleichung in allgemeiner Form.

c) Untersuche die gegenseitige Lage der beiden Ebenen E_3 und E_{-2}.
Ermittle gegebenenfalls das Schnittgebilde.

d) Für jedes $u \in \mathbb{R}$ ist ein Punkt $D_u(4;-2u;u-6)$ gegeben.
Zeige, dass alle Punkte D_u auf einer Geraden h liefen und dass h in E_{-2} liegt.
Die Punkt D_0 und D_3 sind benachbarte Eckpunkte eines Rechtecks.
Die beiden anderen Eckpunkte liegen auf einer Ursprungsgeraden.
Der Vektor $\vec{m} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$ ist senkrecht zu $\overline{D_0D_3}$ und liegt in der selben Ebene wie das Rechteck (Nachweis nicht gefordert). Berechne den Flächeninhalt des Rechtecks.

4.
Beweise die folgende Behauptung:
Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel und gleichorientiert genau dann, wenn gilt $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.

Lösungen:

1.
a)

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix};h:\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$$

Zunächst wird mit Hilfe der Richtungsvektoren überprüft, ob die beiden Geraden parallel zueinander liegen können:

$\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}$ Die Matrix liefert:

$I.s=\frac{1}{2}$

$II.s=-3$

$III.s=-1$

Die beiden Richtungsvektoren sind kein Vielfaches des anderen, damit nicht kollinear, also können die Geraden nicht parallel sein und damit auch nicht identisch sein.

Schneiden sich die beiden Geraden in einem Punkt S, muss gelten:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}\Big|-s\begin{pmatrix}4\\-1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$r\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\7\\-3\end{pmatrix}$ Überprüfen dieses LGS in einer entsprechenden Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c}-4&-2&-6\\-1&-3&-7\\1&1&3\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\-1&-3&-7\\-4&-2&-6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&-2&-4\\0&-6&-18\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}1&1&3\\0&-2&-4\\0&0&6\end{array}\right)$$

Letzte Zeile liefert $0=-6$. Dies ist eine falsche Aussage.

Daraus folgt, dass es keinen Schnittpunkt S der Geraden gibt.

Aus diesem Grund liegen die Geraden windschief.

b)

$$\varepsilon : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; g : \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten gemeinsamer Punkte von ε und g müssen dem folgenden LGS genügen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ -b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Überprüfe das LGS in einer Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a-2 \\ 1 & 2 & -b & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & 1-b & -a+2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a-2 \\ 0 & 1 & 1-b & -a+2 \\ 0 & 0 & b-2 & a-5 \end{array}\right)$$

i.) Das LGS ist erfüllbar, aber nicht eindeutig lösbar, wenn g in der Ebene liegt. Dies ist der Fall für $b = 2 \wedge a = 5$.

ii.) Die Gerade g ist parallel zu der Ebene, wenn die Lösungsmenge des zugehörenden LGS leer ist. Dies ist der Fall für $b = 2 \wedge a \neq 5$.

iii.) Die Gerade g schneidet die Ebene genau in einem Punkt, wenn das zugehörige LGS eindeutig lösbar ist. Dies ist der Fall für $b \neq 2$.

c)

Überführe die Parameterform in allgemeine Form der Ebenengleichung:

$I. x = 2 + s + r \mid \bullet(-1)$

$II. y = 2 + s + 2r$

$III. z = 2 + 0 + r$

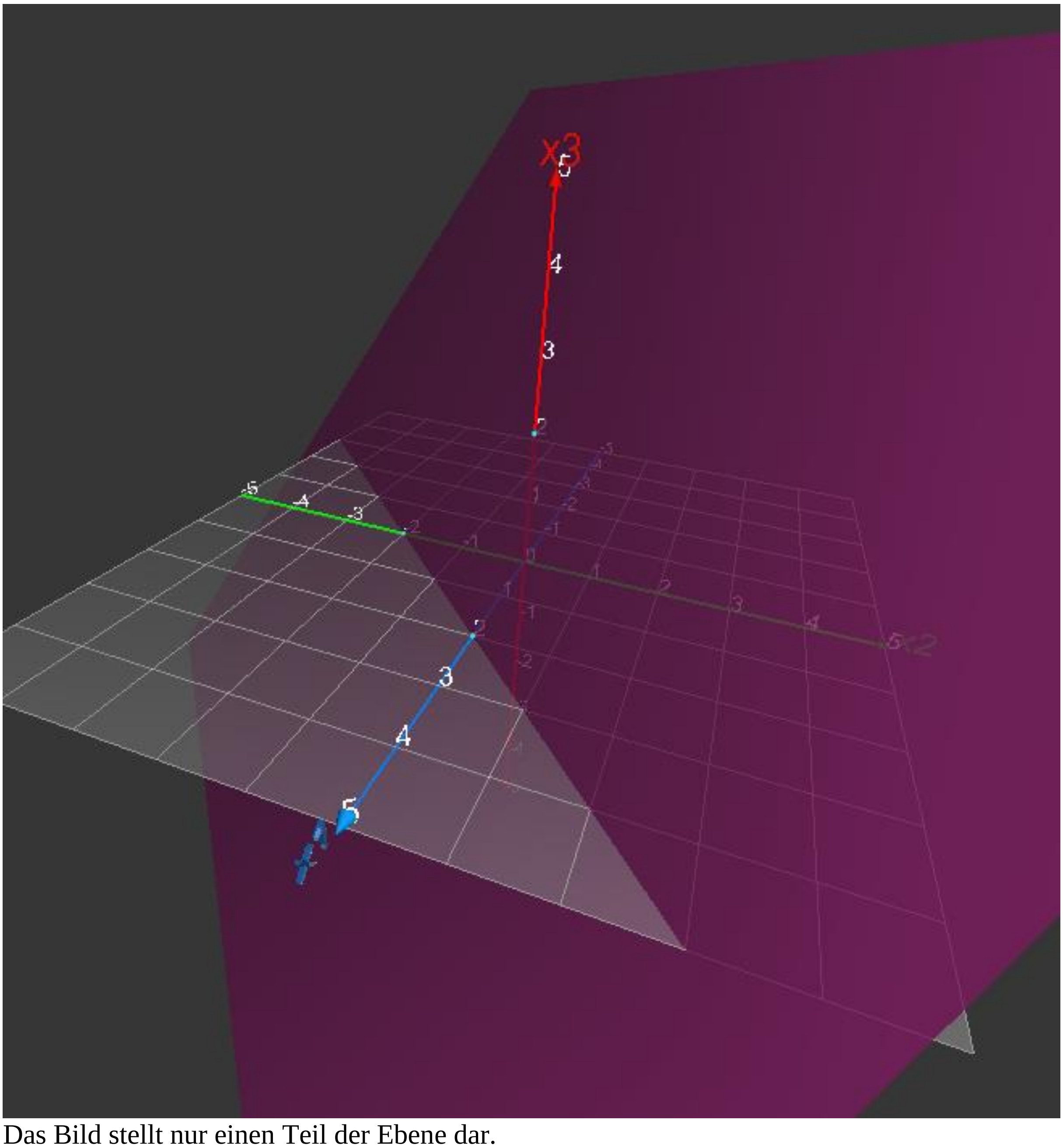
$-----------$

$I'. -x + y = r \mid \bullet(-1)$

$III. z = 2 + r$

$-----------$

$x - y + z = 2$ Die Durchstoßpunkte sind $P_1(2;0;0); P_2(0;-2;0); P_3(0;0;2)$



Das Bild stellt nur einen Teil der Ebene dar.

d)

$\varepsilon: 2x-3y+z=6$

Setze $x=v \wedge y=w$. Für z folgt: $z=6-2v+3w$.

$x=v$

$y=w$

$z=6-2v+3w$

Umschreiben in Vektorgleichung bzw. Parameterform:

$$\varepsilon: \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}+v\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+w\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$$

2.

a)

$$\varepsilon: \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}; g: \vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Punkt A ist der Durschtoßpunkt der x-Achse mit der Ebene. Setze $y=0 \wedge z=0$.

Es folgt: A(3;0;0)

Punkt B ist der Durchstoßpunkt der y-Achse mit der Ebene. Setze $x=0 \wedge z=0$.

Es folgt: B(0;6;0)

Andere Möglichkeit ist die Parameterform der Ebene in allgemeine Form zu bringen und dann die Durchstoßpunkte zu berechnen.

$I.x=2-r+0$

$II.y=3+2r+s$

$III.z=1+0+s$

$---------$

$I.2x+y=7+s$

$III.z=1+0+s$

$--------$

$-2x-y+z=-6$

$A(3;0;0); B(0;6;0); C(0;0;-6)$

Gemeinsame Punkt von g und ε müssen das folgende LGS erfüllen:

$$t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Überführe das LGS in eine Matrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-2\\2&1&-2&-3\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-2\\0&1&-4&-7\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&-1&-2\\0&1&-4&-7\\0&0&2&6\end{array}\right)$$

Die letzte Zeile liefert: $t=3$

$$\vec{x}=t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\\6\end{pmatrix}$$

$C(3;6;6)$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-d_1\\6-d_2\\6-d_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-6\\6-0\\6-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\0\end{pmatrix}$$

$D(-3;6;0)$

b)

$$\overrightarrow{0M_1} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{0M_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M_1(1,5;3;0)$

$$\overrightarrow{0M_2} = \overrightarrow{0A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{0M_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$M_2(4,5;3;0)$

$$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{0A} + \overrightarrow{0M_1} + \overrightarrow{0M_2})$$

$$\overrightarrow{0S} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$S(3;1;1)$

Der Schwerpunkt S hat die Koordinaten S(3;1;1).

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0A} + r(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}); 0 \le r \le 1$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r[\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob es auf der Diagonalen AC liegt, erfolgt durch Einsetzen der Koordinaten von S in die oboige Geradengleichung:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Paramter t ist eindeutig bestimmt. $t = \frac{1}{6}$. Der Schwerpunkt S liegt also auf der Geraden,

da $0 \le \frac{1}{6} \le 1$

c)

A* geht durch Punktspiegelung an C hervor.
A(3;0;0); C(3;6;6)

Skizze veranschaulicht:

$$\overrightarrow{0A*} = \overrightarrow{0C} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{0A*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$A*(3;12;12)$

3.

a) $A_t(-t;-8;1)$; $B_t(4;-4;2t)$; $C(0;-8;4)$

$$\overrightarrow{CA_t} = \begin{pmatrix} -t-0 \\ -8+8 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB_t} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ -4+8 \\ 2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2t-4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{CA_t}$ und $\overrightarrow{CB_t}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn das LGS $r\overrightarrow{CA_t} + s\overrightarrow{CB_t} = \vec{0}$ nur die trivale Lösung besitzt.

$$r\begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2t-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufstellen einer Koeffizientenmatrix, um LGS zu lösen:

$I. -tr + 4s = 0$

$II. 4s = 0$

$III. -3r + (2t-4)s = 0$

Gleichung II. liefert $s = 0$. Einsetzen in III. liefert

$-3r = 0 \Leftrightarrow r = 0.$

Einsetzen in I zur Überprüfung:

$-t \bullet 0 + 4 \bullet 0 = 0$

$0 = 0 w.A$

Aus diesem Grund sind die Vektoren $\overrightarrow{CA_t}$ und $\overrightarrow{CB_t}$ linear unabhängig, da das LGS nur die triviale Lösung aufweist.

$\overrightarrow{CA_t}$, $\overrightarrow{CB_t}$ und $\overrightarrow{0C}$ sind linear abhängig genau dann, wenn das LGS

$r\overrightarrow{CA_t} + s\overrightarrow{CB_t} + u\overrightarrow{0C} = \vec{0}$ nicht nur die triviale Lösung besitzt.

$$r\begin{pmatrix} -t \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2t \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überprüfen dieses LGS in einer Matrix:

$$\begin{pmatrix} -t & 4 & 0 \\ -8 & -4 & -8 \\ 1 & 2t & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -t & 4 & 0 \\ 0 & 4t-32 & -8t \\ 0 & 2t^2+4 & 4t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -t & 4 & 0 \\ 0 & 4t-32 & -8t \\ 0 & 4t^2-4t-24 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieses LGS besitzt nur dann mehr als die triviale Lösung, wenn gilt:

$4t^2 - 4t - 24 = 0$

$t^2 - t - 6 = 0$

Anwenden der p,q-Formel:

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} + - \sqrt{\frac{1}{4} + 6}$$

$t_1 = 3 \wedge t_2 = -2$

Für $t_1 = 3 \wedge t_2 = -2$ sind die Vektoren $\overrightarrow{CA_t}$, $\overrightarrow{CB_t}$ und $\overrightarrow{0C}$ linear abhängig.

Bleibt nur noch der Fall $t = 0$ zu überprüfen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -8 & -4 & -8 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$$

Das zugeörige LGS besitzt also für $t = 0$ nur die triviale Lösung. Die Vektoren

$\overrightarrow{CA_t}$, $\overrightarrow{CB_t}$ und $\overrightarrow{0C}$ sind für $t = 0$ linear unabhängig.

b)

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2t-4 \end{pmatrix}$$

Überführen der Parameterform in die allgemeine Form einer Ebenengleichung.

$I. x = 0 - tr + 4s$

$II. y = -8 + 4s$

$III. z = 4 - 3r(2t-4)s$

Aus II. folgt: $y = -8 + 4s \Leftrightarrow \frac{1}{4}y + 2 = s$

Einsetzen in III. liefrt:

$$z = 4 - 3r + (2t-4)(\frac{1}{4}y + 2)$$

$$s = -\frac{1}{3}z + \frac{1}{6}ty - \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}t$$

Einsetzen von r und s in I. liefert:

$$x = -t(-\frac{1}{3}z + \frac{1}{6}ty - \frac{1}{3}y - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}t) + 4(\frac{1}{4}y + 2)$$

...

$$6x + (t^2 - 2t - 6)y - 2tz = 8t^2 + 8t + 48$$

Dies ist die Gleichung von E in allgemeiner Form.

c)

Einsetzen in die allgemeine Form von E:

$E_3: -6x + 3y + 6z = 0$

$E_{-2}: -6x - 2y - 4z = 0$

Überführe dieses LGS in eine entsprechende Koeffizientenmatrix, da die gemeinsamen Punkte der Ebene von $E_3 \wedge E_{-2}$ gesucht sind.

$$\left(\begin{array}{ccc|} -6 & 3 & 6 \\ -6 & -2 & -4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|} -6 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

Die beiden Ebenen schneiden sich also in einer GEraden.

Setze $z = r$. Dann liefert die lezte Zeile der Matrix:

$-5y - 10r = 0$

$y = -2r$

und die erstre Zeile der Matrix liefert:

$-6s + 3(-2r) + 6r = 0$

$x = 0$

Die Schnittgerade von $E_3 \wedge E_{-2}$ lautet:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

d)

<u>1. Möglichkeit:</u>

Zunächst werden $D_1(4; -2; -5)$ und $D_2(4; -4; -4)$ berechnet.
Da zwei Punkte eine Gerade eindeutig festlegen, lässt sich die Gerade in Parameterform angeben, für die gilt $D_1 \wedge D_2 \in g$:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nachweis, dass $D_u \in g$ für $u \in \mathbb{R}$ durch Einsetzen des Ortsvektors $\overrightarrow{0D_u}$ in die Gleichung von g:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2u \\ u-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$u \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überführe in eine entsprechende Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Das zugehörige LGS ist also lösbar, aber nicht eindeutig lösbar. Das heißt es liegen mehr als ein Punkt D_u auf der Geraden g, also alle Punkte D_u.

<u>2. Möglichkeit:</u>

Die einfachste Gerade wäre, wenn wir den Parameter u auch als Skalar wählen:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Überprüfung, ob D_u auf der Geraden liegt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2u \\ u-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen eines LGS liefert:

$$I.4 = 4w.A$$
$$II. -2u = -2u$$
$$III. u-6 = -6+u$$

Wir erhallten für jedes $t \in$ □ wahre Aussagen. Folglich liegt D_u auf dieser Geraden.

Nachweis $g \in E_{-2}$:
$h \in E_{-2}$, wenn g die Gleichung von E_{-2} erfüllt:
$E_{-2} = 6x - 2y - 4z = 0$
Einsetzen von g liefert:

$$-6 \bullet 4 - 2(2-2r) - 4(-5+r) = 0$$
$$0 = 0$$

Also liegt h in E_{-2}.

Zunächst werden die beiden Eckpunkte $D_0 \wedge D_3$ des Rechtecks bestimmt:
$D_0(4;0;-6); D_3(4;-6;-3)$
Weiterhin wird eine Seitenlänge des Rechtecks berechnet:

$$|\overrightarrow{D_0D_3}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+3^2} = \sqrt{45}$$

Die Eckpunkte P und Q liegen auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Damit ist g Ursprungsgerade und parallel zu $\overrightarrow{D_0D_3}$.

Der Eckpunkt Q muss außerdem auf der Geraden $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ liegen.

Damit ist h senkrecht zu $\overrightarrow{D_0D_3}$ und verläuft durch D_0.

Um den Punkt Q berechnen zu können, setze ich die Gerade g und h gleich.
Der Schnittpunkt dieser beiden Geraden ist Q.

$$r\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

$$r\begin{pmatrix}0\\-6\\3\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-5\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}$$

Aufstellen einer Matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c}0&-5&4\\-6&3&0\\3&6&-6\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&6&-6\\-6&3&0\\0&-5&4\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cc|c}3&6&-6\\0&15&-12\\0&-5&4\end{array}\right)$$

Es folgt, dass u $=-\frac{4}{5}$ ist.

Einsetzen von u $=-\frac{4}{5}$ in die Geradengleichung von h ergibt:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\2,4\\4,8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2,4\\-1,2\end{pmatrix}$$

Mit $D_0(4;0;-6)$ und $Q(0;2,4;-1,2)$ kann der Vektor $\overrightarrow{D_0Q}$ berechnet werden:

$$\overrightarrow{D_0Q}=\begin{pmatrix}0\\2,4\\-1,2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\0\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\2,4\\4,8\end{pmatrix}$$

Berechnung der Länge des Vektors $\overrightarrow{D_0Q}$:

$$|\overrightarrow{D_0Q}|=\sqrt{(-4)^2+(2,4)^2+(4,8)^2}=\sqrt{16+5,76+23,04}=\sqrt{44,8}$$

Flächeninhalt des Dreiecks:

$$A=|\overrightarrow{D_0Q}|\bullet|\overrightarrow{D_0D_3}|=\sqrt{45}\bullet\sqrt{44,8}=44,9$$

4.

s soll $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ gelten. Folglich können $\vec{a}$ und $\vec{b}$ schon mal nicht "nicht parallel" sein, denn ansonsten spannen die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Dreieck auf, in dem die dritte Seite $\vec{a}+\vec{b}$ ist. In diesem Dreieck gilt aber die Dreickungleichung $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$, da die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte Seite. Daraus folgt, dass die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sein müssen.

Nun muss nur noch die gleiche Orientierung nachgewiesen werden!
Wir nehmen an, die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien entgegengesetzt orientiert, dann gibt es ein $k>0$, so dass $\vec{a}=-k\bullet\vec{b}$ gilt.
Einsetzen von $\vec{a}=-k\bullet\vec{b}$ in $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ ergibt:
$|\vec{a}|+|\vec{b}|=|-k\bullet\vec{b}|+|\vec{b}|=|-k|\bullet|\vec{b}|+|\vec{b}|=k\bullet|\vec{b}|+|\vec{b}|=(1+k)\bullet|\vec{b}|$
Einsetzen von $\vec{a}=-k\bullet\vec{b}$ in $|\vec{a}+\vec{b}|$ ergibt:
$|\vec{a}+\vec{b}|=|-k\bullet\vec{b}+\vec{b}|=|\vec{b}\bullet(1-k)|=|\vec{b}|\bullet|1-k|$
Folglich gilt: $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$, denn $|1+k|>|1-k|$ für $k>0$.
Begründung:
So ist $-k<1-k \rightarrow |k|>|1-k|$ und folglich:
$|1+k|>|k|$ und damit $|1+k|>|1-k|$